الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المركز الجامعي بآفلو

Ministère de l'enseignement supérieur
Et De La Recherche scientifique
Centre Universitaire d'Aflou

معهد العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

قسم علوم التسيير والعلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان

دروس في رياضيات المؤسسة

مدعمة بأمثلة تطبيقية

المستوى: السنوات الثانية

التخصص:علوم التسيير والعلوم التجارية

السداسي الأول

إعداد الدكتور:عمارة البشير

الرتبة:أستاذ محاضر أ

السنة الجامعية:2021-2020

الـجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الـشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المركز الجامعي بآفلو

Ministère de l'enseignement supérieur
Et De La Recherche scientifique
Centre Universitaire d'Aflou

معهد العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

قسم علوم التسيير والعلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان

دروس في رياضيات المؤسسة

مدعمة بأمثلة تطبيقية

المستوى: السنوات الثانية

التخصص:علوم التسيير والعلوم التجارية

السداسي الأول

إعداد الدكتور:عمارة البشير

الرتبة:أستاذ محاضر أ

السنة الجامعية:2021-2020

فهرس المحتويات:

المحور	العنوان	الصفحة
	فهرس المحتويات	
	مقدمة	
الاول	مدخل الى بحوث العمليات	
	تعريف بحوث العمليات	02
	تطور بحوث العمليات	02
	عموميات	02
	منهج بحوث العمليات	03
	أهمية بحوث العمليات	03
	تطبيقات بحوث العمليات	03
الثاني	البرمجة الخطية	
	مفهوم البرمجة الجطية	06
	الصيغة العامة للبرمجة الخطية	06
	الشكل القانوني	08
	الشكل المعياري	09
	طرق حل البرمجة الخطية	10
	الطريقة البيانية	10
	جداول السمبلكس	11
	حالات خاصة للحل البياني	14
	حالات خاصة للحل بطريقة السمبلكس	18
	المسألة المرافقة	22
	العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج المقابل	23
	حل المسألة المرافقة في حالة القيود على الشكل المعياري	25
	حل المسألة المرافقة في حالة مزيج من القيود	26
	تحليل الحساسية	27

الثالث	مشكلة النقل	
	تعريف نموذج النقل	39
	النموذج الرياضي لمشكلة النقل	39
	طريقة النقل	40
	جدول النقل	42
	حالة الانحلالية	49
	عدم تساوي العرض والطلب	53
	حالات خاصة لنموذج النقل	58
	نموذج إعادة النقل	58
	نموذج تقليل الفترة الزمنية	66
	نموذج التخصيص	70
الرابع	نظرية الألعاب	
	عموميات	74
	أسلوب MaxMin(MinMax)	75
	حل اللعبة بمزج الاستراتيجيات	76
	الحل البياني	76
	معيار الهيمنة	80
	الحل بطريقة السمبلكس	84
	تمارين	88
	قائمة المراجع	97

مقدمة:

إرتأينا من خلال هذه المطبوعة تجميع الدروس المقررة في مقياس رياضيات المؤسسة في وثيقة واحدة لتسهيل الدراسة والمطالعة لطلبة السنوات الثانية تخصصات علوم التسيير والعلوم التجارية وقد تناولت هذه المطبوعة البيداغوجية دروسا مدعمة بأمثلة تطبيقية محلولة في المحاور الآتية:

- مدخل الى بحوث العمليات ;
- البرمجة الخطية ;
- مشكلة النقل ;
- نظرية الألعاب ;
- تمارين مقترحة للحل.

مدخل الى بحوث العمليات

المحور الأول: مدخل الى بحوث العمليات

1. **تعريف بحوث العليات:** نعرف أولا كل كلمة على حدا:

بحوث: تعني القياس والمقارنة والتنبؤ.

العمليات: الحوادث العسكرية التي تشمل على الفعاليات والإجراءات الإستراتيجية التي تحدث في ساحة المعركة.

وعليه يمكن تعريف بحوث العمليات على أنها" علم وفن يهتم بالبحث عن أفضل الحلول الواجب إقرارها لحل مشكلة معينة وتحت ظروف معينة وذلك باستخدام الطرق الرياضية لمعالجة العوامل المؤثرة على الحل وتحليلها من أجل إعطاء فرصة للمختصين لإتخاذ القرار المناسب"

كما تعرف بحوث العمليات بإنها عبارة عن مجموعة من الطرق والوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الأفضل للموارد.

ويمكن تعريف بحوث العمليات بأنها استخدام الأساليب والطرق العلمية لتنظيم تعاون العمليات والانشطة ضمن نظام ما بغية إيجاد حل أمثل أو حلول مثلى لمشكلات هذا النظام من بين جملة الحلول الممكنة في الشركات -المؤسسات --الادارات-المزارع-الوزارات.

2. **تطور بحوث العمليات:** سميت بحوث العمليات لكون أولى البحوث وتطبيقاتها في هذا المجال كانت على العمليات الحربية، ورغم أن ظهور طرق بحوث العمليات كان في سنة 1936 في بريطانيا إلا أن نشوءها الحقيقي كان خلال فترة الحرب العالمية الثانية ،من خلال فريق من العلماء الانجليز لدراسة المشاكل التقنية والإستراتيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا فقد كان هدف هذا الفريق هو الاستخدام الأمثل للموارد الحربية المحدودة، وبعد النتائج الجيدة بادرت أمريكا إلى اجراء دراسات مماثلة ونظرا للنجاح الذي لقيه هذا الاسلوب في إدارة العمليات الحربية فقد تم نقله للإدارة المدنية وخاصة إلى ادارة الأعمال والمشاريع الاقتصادية.

وقد ساهم الكثير من الرواد في بحوث العمليات فمثلا قام كل من فرديرك تايلور F.Taylor وهنري فايول H.Fayul وجيلبرت وألتون مايو A.Mayo باستخدام الطرق العلمية في الانتاج وتطبيق مبدأ التخصص بينما استخدم غانت Gantt الرسومات البيانية لتوضيح الأعمال المختلفة للمشروع وتطورت فيما بعد لأسلوب PERT وقد قام الدنماركي إرلينغ Erlang بدراسة مشكل الازدحام في خطوط الهاتف وطور نظرية خطوط الانتظار، كما طور Dantizig طريقة لحل مشاكل التعظيم والتدنئة بأسلوب جديد هو البرمجة الخطية أو السمبلكس Simplex .

3. **عموميات:**

أ. النظام:

وهو عبارة عن مجموعة من العناصر المتداخلة والمرتبطة معا في علاقات معينة ومعزولة الى حد ما عن أي نظام آخر وتختلف درجة الارتباط بين عناصر النظام من واحد لآخر.

ب. **النموذج:**

هو عبارة عن صورة مبسطة للتعبير عن نظام عملي من واقع الحياة أو فكرة مطروحة لنظام قابل للتنفيذ بحيث يعطي النموذج صورة واضحة لنظام يصعب على المرء تصور كل أبعاده والعلاقات التي تربط بين عناصره وإن أمكن ذلك يكون بصعوبة بالغة.

ج. **النمذجة:**

تعتبر من المستحدثات المنهجية وبمقتضاها يستطيع الباحث والاداري والتربوي التعامل مع العالم الحقيقي والواقعي للظاهرة المراد التخطيط لها أو تحريكها إلى الوضع المستقبلي المستهدف، والعلاقة تصف الرابط بين كيانين وتوصف عادة على أنها الخاصية المشتركة بين كيانين وأحيانا يتم استبدال العلاقة برابط من الكلمات،يمكن إجراء النمذجة للظواهر المختلفة ويمكن أن يتم ذلك بأساليب ومنهجيات متعددة وفي هذا الاطار تظهر منهجية النمذجة بالمعادلة البنائية كأسلوب أكثر فعالية في معالجة المشكلات المتعددة المتغيرات وذلك من خلال تصميم واختبار النماذج النظرية التي تصف العلاقة بين هذه المتغيرات كميا.

4. **منهج بحوث العمليات:** تعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي إبتداءا من بناء النموذج إلى حله ثم إختباره وبعد ذلك تطبيقه ونظرا لكون التحضير لإتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل:

أ. **صياغة المشكلة:** باتخاذ الخطوات اللازمة لتحويل المشكلة من مسميات وصفية الى رموز رياضية وصياغتها وفقا لعلاقة التي تربطها ;

ب. **بناء النموذج الرياضي:** وذلك بايجاد العلاقة بين معاملات المشكلة في صورة رياضية صحيحة والتي من خلال حلها نصل الى الهدف المرغوب ;

ج. **تحليل المعلومات:** وهذا بحساب المتغيرات المطلوبة وتطبيق طريقة حساسية المتغيرات في مجال الحل الأمثل والتأكد من مصداقية المعلومات من الناحية التطبيقية ;

د. **تنفيذ نتائج المعلومات:** وذلك بتنفيذ قيم المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل واتخاذ القرار الاداري وفقا لهذه النتائج ;

5. **أهمية بحوث العمليات:**

- توفر بحوث العمليات إمكانية القياس الكمي للظواهر المختلفة (عواملها،متغيراتها وظروفها المختلفة) ;
- تساعد على ايجاد عدد كبير من البدائل والمفاضلة بينها للوصول إلى الحل الأمثل بسرعة وكفاءة عالية ;
- تعتبر القاعدة العلمية لدراسة المشكلات وإتخاذ القرارات كما تمكن من تحديد النتائج المتوقعة للقرارات وتقويمها في مرحلة مبكرة قبل تنفيذها ;
- تتيح إمكانية ربط الأهداف الفرعية للوظائف والانشطة المختلفة والتحكم فيها من خلال التنسيق بين الأهداف الفرعية وربطها بالأهداف العامة للنظام.

6. **تطبيقات بحوث العمليات:** نظرا لتعدد تطبيقات بحوث العمليات مما يصعب حصرها نذكر بعضها فيما يلي:

- مشكلة نقل المواد ;

- مشكلة التعيين والتخصيص ;
- المزيج الأمثل للمنتجات ;
- تخطيط الانتاج ;
- تخطيط المالية ;
- اختيار الميزانية العامة ;
- تخطيط أنماط استهلاك الطاقة ;
- تحديد المواقع الخدمية والانتاجية ;
- التخطيط والتحكم في المخزون ;
- تصميم الشبكات الكهربائية ;
- تخطيط الاشارات الضوئية في الطرق ;
- تخطيط شبكات الري والصرف ;
- المحاكاة ;
- تخطيط المشروعات ;
- التنبؤ ;
- تقييم الاستثمارات ;
- ظروف المخاطرة وعدم التأكد.

البرمجة الخطية

المحور الثاني: البرمجة الخطية

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزا مرموقا في مجال بحوث العمليات ولها تطبيقات واسعة وقد تم تطوير الأساليب الفنية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية بعد الحرب العالمية الثانية حيث تم تطوير طريقة رياضية ذات كفاءة عالية من قبل العالم G.Dantzing وسميت بالطريقة المبسطة والتي سنتطرق لها لاحقا.

1. **مفهوم البرمجة الخطية(Linear Programming)** : هي مجموعة من الطرق الخاضعة لموضوع بحوث العمليات والتي هي عبارة عن مجموعة من طرق التحليل العلمي وتبحث على وجه الخصوص على أمثليات الاستخدام للموارد الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الجزئي خاصة وذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية،وتعالج البرمجة الخطية مشكلة التعظيم و التدنئة لدالة معينة تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية أو دالة الفعالية ضمن مجال محدد بواسطة قيود مفروضة على متغيرات الدالة غالبا ما تكون على شكل معادلات أو متراجحات.

خطية: تعني أن دالة الهدف وجميع القيود دوال خطية.

برمجة: وتعني تخطيط.

2. **الصيغة العامة للبرمجة الخطية**

بعد جمع المعلومات اللازمة عن المشكلة يقوم المسير أو المبرمج بتحديد دالة الهدف ووضع القيود المفروضة على الحل والشروط الواجبة للحل ويتكون البرنامج الخطي مما يلي:

أ. **دالة الهدف (Objective Fonction)**: هناك نوعان من المسائل الأولى مسائل تعظيم (Maximize) تتعلق بالوصول الى أقصى ربح ممكن أو اقصى انتاج ممكن وتكون في الجوانب الايجابية للمؤسسة أو للهيئة متخذة القرار، والثانية مسائل تدنئة (Minimize) وتتعلق بالوصول إلى أقل تكلفة ممكنة أو أقل خسارة ممكنة وتكون في الجوانب السلبية للجهة متخذة القرار.

ب. **القيود (Constraints)**:وتكون عبارة عن معادلات أو متراجحات رياضية تعبر عن وجود حد لدالة الهدف سواء كانت تعظيم أو تدنئة نظرا لكون موارد المؤسسة أو الهيئة متخذة القرار محدودة وقد تكون هاته القيود حد أدنى مفروض يجب أن نعادله أو نتجاوزه في النتائج.

ج. **شرط عدم السلبية(non-negativity condition)**: وهذا يعني أن الكميات التي نجدها تكون كميات موجبة أو معدومة أي أنها واقعية وليست نتائج رياضية لا يمكن تطبيقها.

لصياغة دالة الهدف تتطلب عادة بعض الأمثلة:

- ✓ تعظيم الربح Maximize Profit
- ✓ تدنية التكاليف Minimize Cost
- ✓ تقليل الوقت الضائع Minimize Overtime

- ✓ تعظيم استخدام الموارد المتاحة Maximize Resources
- ✓ تقليل زمن تغيب العاملين Minimize Absenteeism
- ✓ تخفيض زمن عطل الآلات Minimize Tool Breakdown
- ✓ تقليل المخاطرة في العمل Minimize Risk of Work
- ✓ تعظيم احتمال أن العمليات تقع ضمن المواصفات Maximize Prob Process Spes

ويصحب هذه الاهداف معادلات القيود والتي غالبا ما تخضع للأسباب التالية:

- ✓ المواد الخام المتاحة ;
- ✓ الميزانية المخصصة ;
- ✓ الزمن المخصص ;
- ✓ القوى العاملة المتاحة ;
- ✓ القدرة والمهارة المتااحة ;

مثال01:

اذا كنا نرغب في انتاج عدد ما من منتوجين P_1,P_2 علما أن (1) هامش الربح على المنتوجين هو وحدتين نقديتين، خمس وحدات نقدية على التوالي (2) المنتوج الأول يستهلك ثلاث وحدات (ساعات آلات) وتسع وحدات (يد عاملة) بينما المنتوج الثاني يستهلك أربع وحدات (ساعات آلات) وسبع وحدات (يد عاملة) ,(3) الكميات المتاحة من المورد الأول هي 200 وحدة والكميات المتاحة من المورد الثاني هي 300 وحدة،(4) السوق يفرض إنتاج 20 وحدة على الاقل من المنتوج الأول P_1.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي للمسألة؟

الحل:

البيانات أعلاه يمكن تلخيصها كما يلي:

	P_1	P_2	
	X_1	X_2	
هامش الربح	2	5	
ساعات الآلات	3	4	≤200
ساعات اليد العاملة	9	7	≤300
أقل كمية من المنتوج P_1	20		P_1≥

اذن البرنامج الخطي يكتب كما يلي:

دالة الهدف $MaxZ_0 = 2X_1 + 5X_2,$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 200,$$

القيود $9X_1 + 3X_2 \leq 300,$

$$X_1 \geq 20,$$

شرط عدم السلبية $X_1, X_2 \geq 0$

3. **الشكل الرياضي في البرمجة الخطية:** بعد كتابة المسألة في البرمجة الخطية تطرح مشكلة حل المسالة لكن الحل يتطلب كتابة المسألة على شكل رياضي يتناسب مع طريقة الحل.

أ. **الشكل القانوني:** يتميز هذا الشكل بـ:

- ✓ دالة الهدف من النوع Max ;
- ✓ القيود التقنية كلها من النوع أقل أو يساوي (متراجحات) ;
- ✓ $X_J \geq 0$.

والشكل الرياضي العام هو: $MaxZ_0 = \sum C_J X_J,$

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i \ , i = 1,2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0 \ , j = 1,2, \dots, n$$

$$MaxZ = [c_1 c_2 c_3 \dots c_n] \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$\text{S/C} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ S_n \end{bmatrix}$$

تصبح القيود عند تحضير البرنامج:

$$[A, I] \cdot \begin{bmatrix} X \\ S_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Max\ Z = \acute{C}X$$

$$S/C \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

$\acute{C}$: هو منقول مصفوفة معاملات دالة الهدف

X: هو شعاع المتغيرات

A: هي مصفوفة معاملات القيود

B: شعاع الثوابت

I: مصفوفة وحدوية قطرها بقيم الواحد والباقي أصفار.

$$[A, I] \cdot \begin{bmatrix} X \\ S_i \end{bmatrix} = b_i$$

ب. **الشكل المعياري:** يتميز هذا الشكل بـ:

- ✓ دالة الهدف من النوع Minأو Max ;
- ✓ جميع القيود من النوع يساوي (=) ;

$X_J \geq 0$ ✓.

هذا الشكل مهم جدا لحل مسائل البرمجة الخطية إذا كانت المسألة على الشكل المعياري فيمكن حل المسألة مباشرة أما إذا كانت المسألة المطروحة على شكل قانوني فنحن بحاجة لإضافة متغير جديد في الطرف الايسر.

الشكل الرياضي العام: $(Min)MaxZ_0 = \sum C_J X_J,$

$$\sum a_{ij}X_j + S_i = b_i\ , i = 1,2, \dots , m$$

$$X_j \geq 0\ , j = 1,2, \dots , n$$

$$(Min)Max\ Z = \acute{C}X$$

$$\text{S/C}\begin{cases} AX(\geq) \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

أما إذا كانت قيود المسالة من الشكل أكبر أو يساوي أو معادلات على شكل تساوي فتكون ونضيف متغيرات اصطناعية (Artificial Variable)m_i عندما تكون لدينا معادلات ونقوم بطرح متغير الفجوة واضافة متغير اصطناعي $-S_i + m_i$ في حالة متراجحات من الشكل أكبر أو يساوي .

4. **طرق حل البرمجة الخطية**: نعني بحل البرنامج الخطي ايجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو تدنئة.

أ. **الطريقة البيانية(Graphical Method)**: يمكن حل مسائل البرمجة الخطية بالطريقة البيانية فقط عندما لا يتجاوز عدد المتغيرات 2 متغيرين ويتم الحل وفق الخطوات التالية:

- تحديد المتغيرات ونستعمل المتغير الاول للمحور الأفقي والمتغير الثاني للمحور العمودي ;
- تحويل متراجحات القيود الى معادلات ;
- تمثيل المعادلات بإعطاء قيمة للمتغير الأول حتى نوجد المتغير الثاني ثم نعطي قيمة للمتغير الثاني فنوجد المتغير الأول ;
- نقوم بإلغاء المساحة التي لا تحقق كل مستقيم وفقا للمتراجحة الأصلية فنلغي يمين المستقيم في حالة قيد من الشكل أصغر أو يساوي ونشطب المساحة على اليسار ونقوم بإلغاء المساحة على يسار المستقيم في حالة القيد من الشكل أكبر أو يساوي وتشطيب المساحة على اليمين وتكون الحلول على الخط المستقيم في حالة القيد الأصلي عبارة عن معادلة ;
- نتحصل على مضلع متعدد الرؤوس عبارة عن تقاطع بين المساحات المضللة أو المشطبة ;
- رؤوس المضلع المتحصل عليه هي الحلول الممكنة للبرنامج الخطي ;

- نقوم بتعويض احداثيات كل رأس مضلع في دالة الهدف ونختار التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم والتي تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف في حالة التدنئة ويمكن الحصول على أكثر من حل نختار احداها.
- هناك بعض الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية فقد نجد عدة حلول مثلى أو لا نجد حل أمثل أو نجد انحلالية في الحل لأن عدد المتغيرات في الحل الأمثل والتي قيمتها أكبر من الصفر هي أقل من عدد قيود النموذج.

ب. **الحل بطريقة السمبلكس(The Simplex Method)**: عندما يزيد عدد المتغيرات عن 2 متغيرين لابد من طريقة قوية وتتمثل في طريقة السمبلكس أو الجداول المتتالية وهي وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية لاستخراج الحلول المثلى للبرامج الخطية وتتمثل خطواتها فيما يلي:

- تحضير البرنامج الخطي للحل وذلك بإضافة متغيرات الى يسار المتراجحة أو المعادلة لموازنة النموذج ;
- نقوم بإضافة متغيرات فجوة S_i(Slack Variable) وتدعى بالمتغيرات الخاملة أو الراكدة وهي الطاقة غير المستغلة أي الفرق بين الامكانيات المتاحة والمستغلة في الانتاج تضاف عندما تكون المتراجحات من الشكل أصغر أو يساوي ونضيف متغيرات اصطناعية m_i(Artificial Variable) عندما تكون لدينا معادلات ونقوم بطرح متغير الفجوة واضافة متغير اصطناعي $-S_i + m_i$ في حالة متراجحات من الشكل أكبر أو يساوي ;
- يكون معامل متغيرات الفجوة معدوما في دالة الهدف وتنتج عن كل المتغيرات المضافة التي تعتبر أساسية أو داخل القاعدة مصفوفة معاملات أحادية وتكون جميع هذه المتغيرات الأساسية موجبة ;
- تمثيل البرنامج المحضر على شكل جدول يسمى بجدول الحل المبدئي ;
- ايجاد المتغير المرشح لدخول القاعدة أو الاساس من بين المتغيرات الحقيقية والموافق لأكبر عائد ويسمى العمود الموافق للمتغير بعمود الارتكاز ;
- تحديد المتغير المرشح للخروج من القاعدة أو الأساس وهو الموافق لأقل نسبة موجبة عند قسمة عناصر عمود الثوابت على عناصر عمود الارتكاز ويسمى السطر الموافق بسطر الارتكاز;
- القاطع بين سطر وعمود الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز
- عمود الارتكاز في المرحلة الجديدة يصبح عمود أحادي ;
- نقسم سطر الارتكاز على قيمة عنصر الارتكاز ;
- نحسب كل قيمة من القيم الباقية بالمعادلة التالية العنصر القديم مطروحا منه جداء العنصر المقابل له في سطر الارتكاز والعنصر المقابل له في عمود الارتكاز مقسوما على عنصر الارتكاز ;
- نختبر الحل المحصل عليه فيجب أن تكون جميع قيم سطر الحل موجبة في حالة التعظيم وجميع قيم سطر الحل سالبة في حالة التدنئة في حالة عدم التحقق يتواصل الحل حتى يتحقق الشرط ;
- الحل الامثل نجده في جدول الحل النهائي وكذلك قيمة الكميات المثلى.

مثال02:

ينتج مصنع بلاستيك نوعين من الأدوات البلاستيكية يتطلب انتاج وحدة واحدة من النوع الأول ثلاث ساعات عمل و 4 كيلوغرام من المادة الأولية ويتطلب انتاج وحدة واحدة من النوع الثاني خمس ساعات عمل و2 كيلوغرام من المادة الأولية.

إذا علمت أن الأرباح العائدة هي 10،8 وحدات نقدية على التوالي لكل وحدة انتاج وأن امكانيات المصنع الأسبوعية هي 109 ساعة عمل و 80 وحدة من المادة الأولية.

المطلوب:

إيجاد الحل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية وبطريقة السمبلكس؟

الحل:

كتابة البرنامج الخطي:

$$MaxZ_0 = 10X_1 + 8X_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \leq 109, \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 80, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات نقوم بتمثيلها:

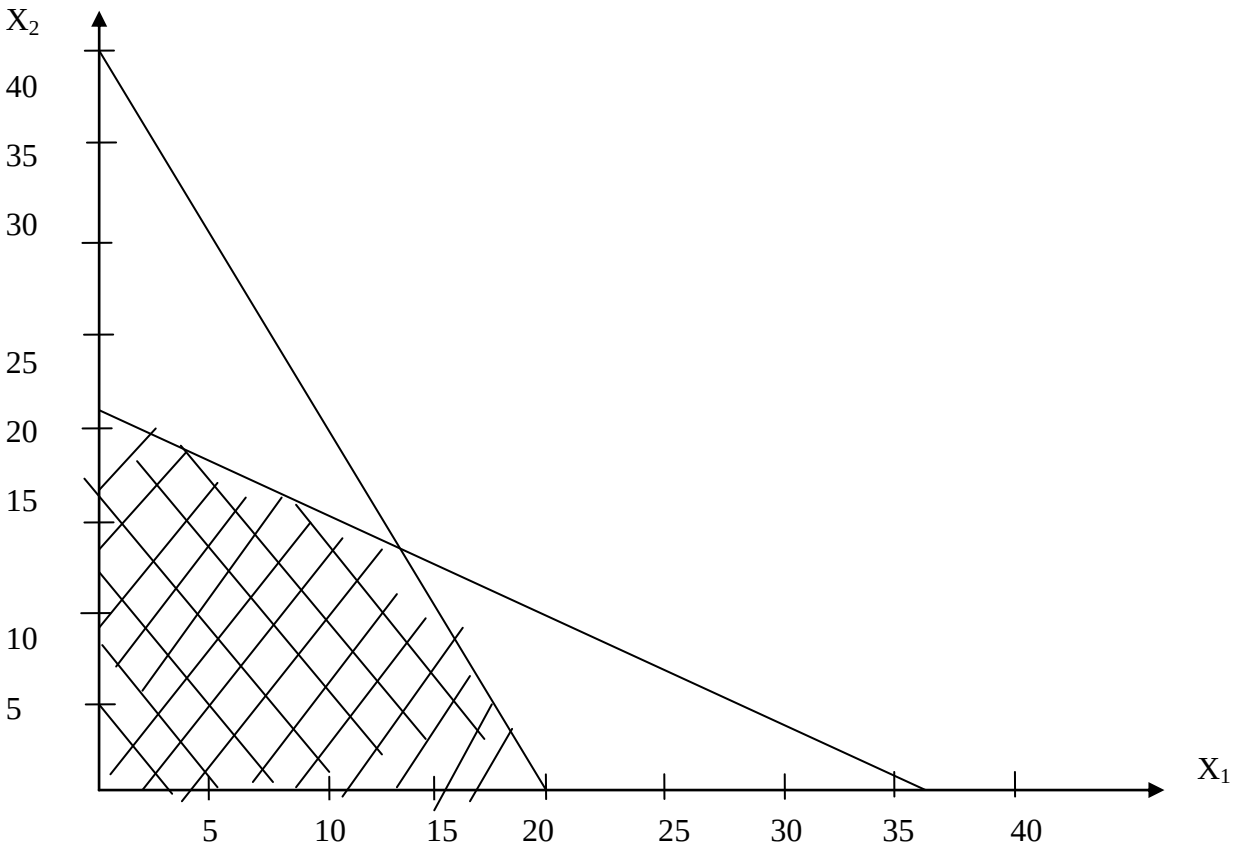
$$3X_1 + 5X_2 = 109$$

$$4X_1 + 2X_2 = 80$$

X_1	0	36,33
X_2	21,8	0

X_1	0	20

X_2	40	0



نتحصل على المضلع المضلل ورؤوس المضلع هي الحلول المحتملة نعوض في دالة الهدف ونأخذ الحل الذي يحقق أقصى ربح.

الحل بطريقة السمبلكس:

$$MaxZ_0 = 10X_1 + 8X_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \leq 109, \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 80, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تحضير البرنامج:

$$MaxZ_0 = 10X_1 + 8X_2 + 0S_1 + S_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 + S_1 = 109, \\ 4X_1 + 2X_2 + S_2 = 80, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS[1]
Z_0	-10	-8	0	0	0
S_1	3	5	1	0	109
S_2	4	2	0	1	80
Z_0	0	-3	0	$\frac{5}{2}$	200
S_1	0	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	49
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	20
Z_0	0	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{13}{7}$	242
X_2	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{14}$	14
X_1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	13

اذن الحلول هي: $Z_0=242, X_1=13, X_2=14$

5. حالات خاصة للحل البياني

أ. تعدد الحلول حيث نجد على الأقل رأسين من رؤوس المضلع يحققان الحل الامثل.

مثال03:

$$MaxZ_0 = 2X_1 + 4X_2,$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 8X_2 \leq 40, \\ X_1 \leq 6, \end{cases}$$

[1] Right Hand Side

$$X_2 \leq 4,$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

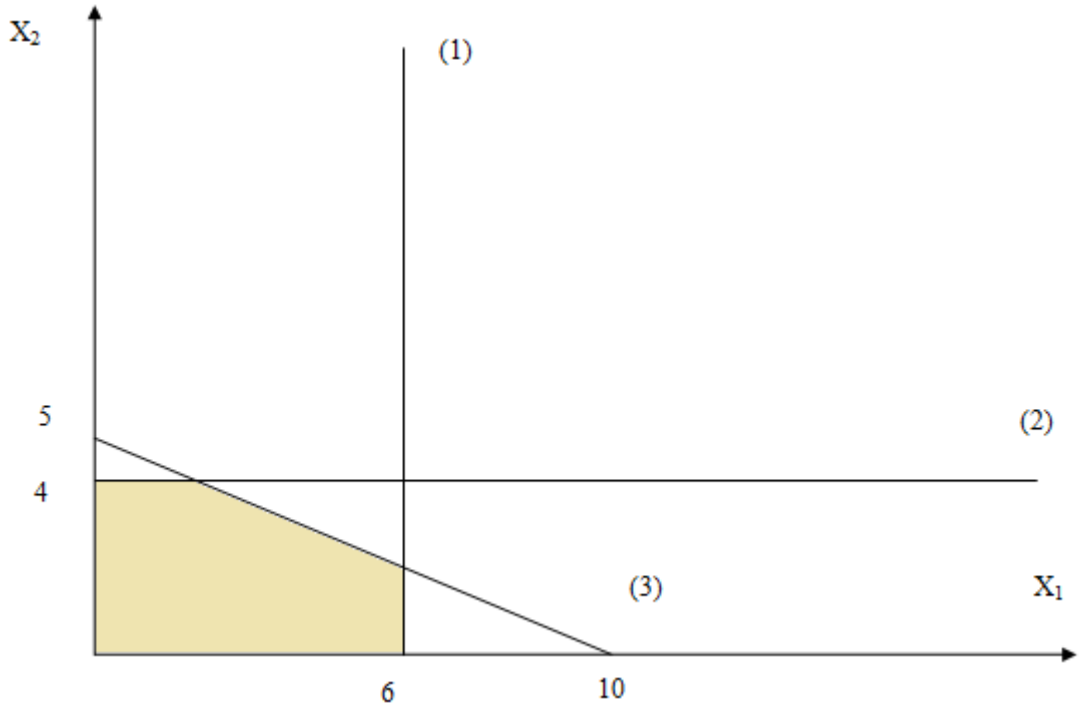
الحل:

نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات:

$$4X_1 + 8X_2 = 40,$$
$$X_1 = 6,$$

$$X_2 = 4$$

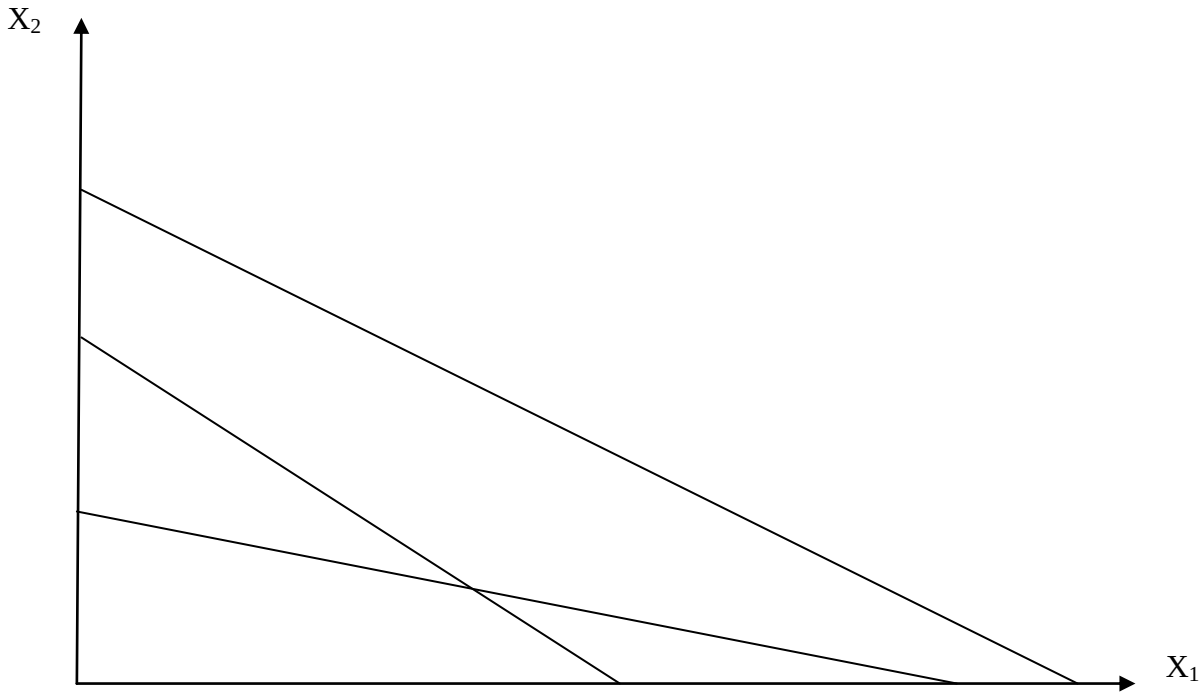
X_1	0	10
X_2	5	0



الثنائيات التالية تحقق نفس الحل:$(X_1,X_2)=(2,4)$, $(X_1,X_2)=(6,2)$ حيث $Z_0=2(6)+4(2)=2(2)+4(4)=20$

هناك حلين أمثلين.

ب. حالة حياد أحد القيود:



ج. حالة استحالة الحل عندما تكون القيود متناقضة مع بعضها فلا نتحصل على منطقة حل.

مثال04:

$$MaxZ_0 = 20X_1 + 4X_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 10, \\ 4X_1 + 6X_2 \geq 20, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

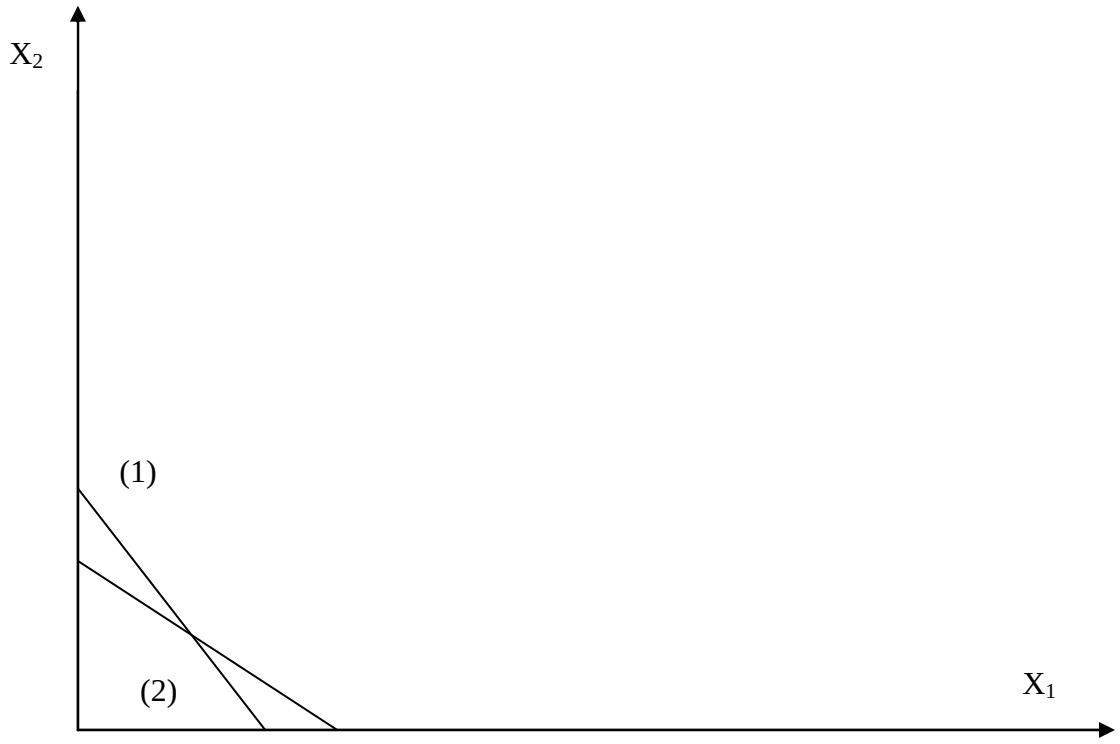
الحل:

نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات:

$$3X_1 + 2X_2 = 10,$$
$$4X_1 + 6X_2 = 20,$$

X_1	0	5
X_2	3,33	0

X_1	0	3,33
X_2	5	0



لا توجد منطقة حل كل المناطق تلغى .

د. لا نهائية الحلول.

مثال 05:

$$MaxZ_0 = 2X_1 + 4X_2,$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 8X_2 \geq 40, \\ X_1 \geq 6, \end{cases}$$

$$X_2 \geq 4,$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

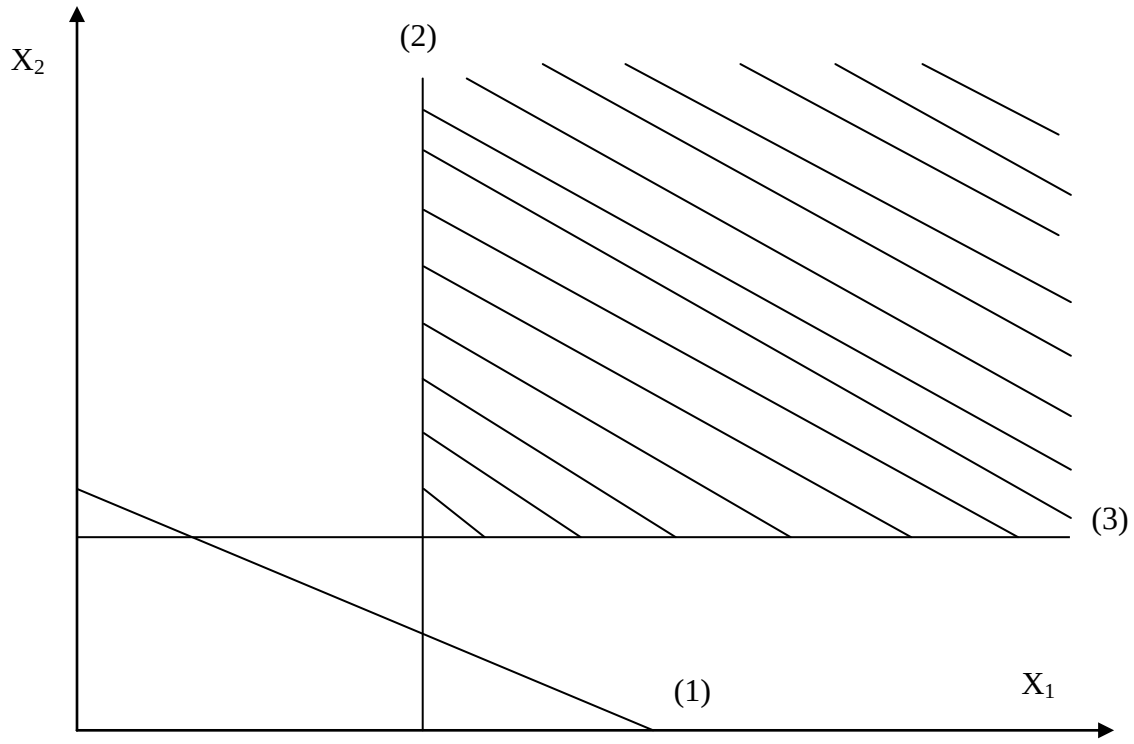
الحل:

نقوم بتحويل المتراجحات الى معادلات:

$$4X_1 + 8X_2 = 40$$
$$X_1 = 6$$

$$X_2 = 4$$

X_1	0	10
X_2	5	0



المساحة المضللة غير محدودة وبالتالي هناك ما لا نهاية من الحلول.

6. **حالات خاصة لطريقة السمبلكس**

أ. **الانحلالية**: في مراحل عمليات السمبلكس يمكن ظهور قيمة الصفر في الطرف الأيمن في هذه الحالة ليس هناك ضمان أن قيمة Z_0 سوف تتحسن في المراحل التي تلي أو بعبارة أخرى عمليات السمبلكس يمكن أن تدخل في حلقة حيث لا يمكن تحسين قيمة دالة الهدف لكن الانحلالية يمكن أن تكون مرحلية أو مؤقتة.

مثال 06:

$$MaxZ_0 = 3X_1 + 9X_2,$$

$$\begin{cases} X_1 + 4X_2 \leq 8, \\ X_1 + 2X_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تحضير البرنامج:

$$MaxZ_0 = 3X_1 + 9X_2 + S_1 + S_2,$$

$$\begin{cases} X_1 + 4X_2 + S_1 = 8, \\ X_1 + 2X_2 + S_2 = 4, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	-3	-9	0	0	0
S_1	1	4	1	0	8
S_2	1	2	0	1	4
Z_0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
S_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
Z_0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
X_1	1	0	-1	2	0

ب. **الحل البديل:** تكون قيمة دالة الهدف واحدة والمتغيرات أكثر من حالة.

مثال07:

$$MaxZ_0 = 4X_1 + 14X_2,$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 7X_2 \leq 21, \\ 7X_1 + 2X_2 \leq 21, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

نقوم بتحضير البرنامج:

$$MaxZ_0 = 4X_1 + 14X_2 + 0S_1 + 0S_2,$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 7X_2 + S_1 = 21, \\ 7X_1 + 2X_2 + S_2 = 21, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	-4	-14	0	0	0
S_1	2	7	1	0	21
S_2	7	2	0	1	21
Z_0	0	0	2	0	42
X_2	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	3
S_2	$\frac{45}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	1	15
Z_0	0	0	2	0	42
X_2	0	1	$\frac{7}{45}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{7}{3}$

ج. **فضاء غير محدود وحل محدود**

مثال08:

$$MaxZ_0 = 6X_1 + 2X_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 \leq 10, \\ X_1 \leq 4, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

نقوم بتحضير البرنامج:

$$MaxZ_0 = 6X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2,$$

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 + S_1 = 10, \\ X_1 + S_2 = 4, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	-6	-2	0	0	0
S_1	3	-1	1	0	10
S_2	1	0	0	1	4
Z_0	0	-4	2	0	20
X_1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
S_2	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
Z_0	0	0	-2	12	28
X_1	1	0	0	1	4
X_2	0	1	-1	3	2

د. بدون حل

مثال09:

$$MaxZ_0 = 2X_1 + X_2,$$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \leq 10, \\ 2X_1 \geq 40, \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	-2	-1	0	0	0
S_1	1	-1	1	0	10
S_2	2	0	0	1	40
Z_0	0	-3	2	0	20
X_1	1	-1	1	0	10
S_2	0	2	-2	1	20
Z_0	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	50
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	20
X_2	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	10

7. المسألة المرافقة Duality

إحدى أبرز خصائص البرمجة الخطية تكمن في الازدواجية أو المرافقة فكل مشكلة في البرمجة الخطية (Primal) لها وجه آخر هو المرافق (Dual) للحصول على نفس النتيجة، يحقق استخدام النموذج المرافق فوائد عديدة منها سهولة الحصول على الحل عندما يصعب في حالة النموذج الأولي.

البرنامج الاولي	البرنامج الثنائي
دالة الهدف من النوع Maximum	دالة الهدف من النوع Minimum
القيود كلها من الشكل أقل أو يساوي	كل القيود تصبح من الشكل أكبر أو يساوي
دالة الهدف من النوع Minimum	دالة الهدف من النوع Maximum
القيود كلها من الشكل أكبر أو يساوي	كل القيود تصبح من الشكل أقل أو يساوي
قيود البرنامج الاولي	هي متغيرات البرنامج الثنائي
متغيرات البرنامج الاولي	هي قيود البرنامج الثنائي
معاملات المتغيرات في قيود البرنامج الأولي(عمود)	هي معاملات المتغيرات في قيود البرنامج الثنائي (سطر)

معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي	هي عناصر الطرف الأيمن في قيود البرنامج الثنائي

كما يمكن توضيح العلاقة بين البرنامج الأولي والبرنامج المقابل من خلال جدول تاكر A.Tucker :

$a_{11}\ a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}$	$\leq b_1 \rightarrow y_1$	≥ 0
$a_{21}\ a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}$	$\leq b_2 \rightarrow y_2$	≥ 0
. . ... .	.	.
. . ... .	.	.
$a_{m1}\ a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}$	$\leq b_m \rightarrow y_n$	≥ 0
$\geq \quad \geq \dots \dots \dots \dots \dots \dots \geq$ $C_1 C_2 \dots \dots \dots \dots \dots C_m$	Min y_i Max Z_0	
$\geq 0 \quad \geq 0 \dots \dots \dots \dots \dots \geq 0$		

العلاقة بين النموذج الاولي والنموذج المقابل:

- ✓ إن تحويل النموذج الثنائي الى نموذج مقابل يتحول الى البرنامج الاصلي ;
- ✓ المصفوفة A(mxn) للنموذج الأولي تعطي المصفوفة (nxm) للنموذج الثنائي ;
- ✓ لكل قيود النموذج الأولى توجد علاقة لمتغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح ;
- ✓ لكل متغير في النموذج الاولي توجد علاقة له بقيود النموذج الثنائي والعكس صحيح ;
- ✓ نتحصل على نفس الحل من النموذج الاولي والمقابل ;
- ✓ اذا كان للنموذج الأولي حل أمثل فأيضا يوجد حل أمثل للنموذج المقابل ;
- ✓ إذا كان النموذج الأولي له حل غير محدود فإن النموذج الثنائي لا يوجد له حل والعكس صحيح .

مثال10:

اليك البرنامج الخطي التالي:

$$MaxZ_0 = 5X_1 + 6X_2,$$

$$\begin{cases} X_1 + 9X_2 \leq 60, \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 45, \\ 5X_1 - 2X_2 \leq 20, \\ X_2 \leq 30, \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يكون البرنامج المرافق:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = {}^t \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Dual :

$$Miny_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4,$$
$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 5,$$
$$9y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 6,$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

مثال11:

أوجد الحل للبرنامج المرافق واستنتج حل البرنامج الأولي؟

$$MaxZ_0 = 2X_1 + X_2,$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 12,$$
$$4X_1 + X_2 \leq 8,$$
$$4X_1 - X_2 \leq 8,$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

تحويل البرنامج الأولي الى البرنامج المرافق:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = {}^t \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Miny_0 = 12y_1 + 8y_2 + 8y_3,$$
$$4y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 2,$$
$$3y_1 + y_2 - y_3 \geq 1,$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

تحضير البرنامج:

$$Miny_0 = 12y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 0m_1 + 0m_2,$$

$$4y_1 + 4y_2 + 4y_3 - S_1 + m_1 = 2,$$
$$3y_1 + y_2 - y_3 - S_2 + m_2 = 1,$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	m_1	m_2	RHS
y_0	-12+7m	-8+5m	-8+3m	-m	-m	0	0	3m
m_1	4	4	4	-1	0	1	0	2
m_2	3	1	-1	0	-1	0	1	1
y_0	0	$-4+\frac{4}{3}m$	$-12+\frac{8}{3}m$	-m	$-4+\frac{2}{3}m$	0	$4-\frac{5}{3}m$	$4+\frac{1}{3}m$
m_1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_0	0	2	0	$-\frac{9}{2}$	1	$\frac{9}{2}-m$	$1-\frac{2}{3}m$	$\frac{11}{2}$
y_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
y_0	0	0	-4	-3	0	$\frac{3}{2}-m$	2-2m	5
y_2	0	1	2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y_1	1	0	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ومنه حلول البرنامج المقابل: $y_0=5, y_1=1/4, y_2=1/4$

ونستنتج أن حلول البرنامج الأصلي هي: $Z_0=5, X_1=3/2, X_2=2$

أ. المسألة المرافقة في حالة النموذج الاولي على شكل معياري:

$$\mathrm{Max} Z_0 = C_1X_1 + C_2X_2,$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2,$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

نعلم أن كل معادلة يمكن تحويلها الى متراجحتين متعاكستين في الاتجاه:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \rightarrow \begin{matrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1 \end{matrix}$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \rightarrow \begin{matrix} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2 \\ -a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \leq -b_2 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} =^t \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{11} & a_{21} & -a_{21} \\ a_{12} & -a_{12} & a_{22} & -a_{22} \end{vmatrix}$$

Dual : $Miny_0 = b_1y_1 + b_2y_2,$

$a_{11}y_1^{\pm} + a_{21}y_2^{\pm} \geq C_1,$

$a_{12}y_1^{\pm} + a_{22}y_2^{\pm} \geq C_2,$

y_1, y_2بدون قيد على الاشارة

	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	S_1	S_2	m_1	m_2	RHS
y_0	$-b_1 + m(a_{11} + a_{12}$	$b_1 + m(-a_{11} - a_{12}$	$-b_2 + m(a_{21} + a_{22}$	$b_2 + m(-a_{21} - a_{22}$	-m	-m	0	0	$m(c_1+c_2)$
m_1	a_{11}	$-a_{11}$	a_{21}	$-a_{21}$	-1	0	1	0	C_1
m_2	a_{12}	$-a_{12}$	a_{22}	$-a_{22}$	0	-1	0	1	C_2

مثال12:

أكتب البرنامج المرافق وأوجد حله واستنتج حل البرنامج الاصلي للبرنامج الآتي:

$$MaxZ_0 = X_1 + 2X_2,$$
$$X_1 + X_2 = 3,$$
$$2X_1 + X_2 = 4,$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

ب. **حل المسألة المرافقة في خالة البرنامج الاصلي مزيج من القيود**

$$MaxZ_0 = C_1X_1 + C_2X_2,$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2,$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

يصبح لدينا:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \le b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \le b_2$$
$$-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \le -b_2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = {}^t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{22} \end{vmatrix}$$

Dual : $Miny_0 = b_1y_1 + b_2y_2^{\pm},$

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2^{\pm} \ge C_1,$

$a_{21}y_1 + a_{22}y_2^{\pm} \ge C_2,$

$y_1 \ge 0, y_2$ بدون قيد الاشارة

مثال13:

أكتب البرنامج المرافق وأوجد حله واستنتج حل البرنامج الاصلي للبرنامج الآتي:

$$MaxZ_0 = 11X_1 + 9X_2,$$
$$X_1 + 2X_2 = 1,$$
$$3X_1 + X_2 \le 2,$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$X_1 + 2X_2 \le 1,$$
$$-X_1 - 2X_2 \le -1$$
$$3X_1 + X_2 \le 2,$$

التحويل الى البرنامج المرافق:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = {}^t \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Miny_0 = y_1 + 2y_2,$$
$${y_1}^{\pm} + 2y_2 \ge 1,$$
$$3{y_1}^{\pm} + y_2 \ge 2,$$

$$y_2 \ge 0$$

y_1 بدون قيد على الاشارة

تحضير البرنامج:

$$Miny_0 = y_1 + 2y_2 + 0m_1 + 0m_2,$$

$$y_1^{\pm} + 2y_2 - S_1 + m_1 = 1,$$
$$3y_1^{\pm} + y_2 - S_2 + m_2 = 2,$$

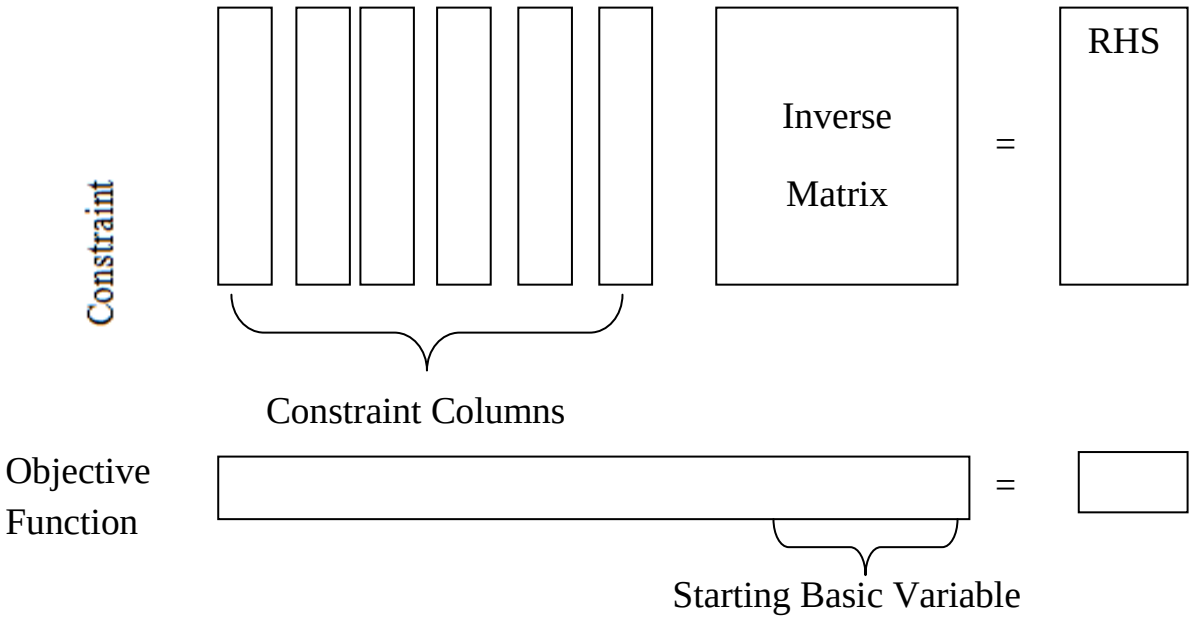
$$y_2 \geq 0$$

y_1 بدون قيد على الاشارة

8. تحليل الحساسية:

بعد إيجاد الحل النهائي يمكن أن تحدث بعض التغيرات على المسألة وفي هذه الحالة يمكن حل المسالة من جديد بادخال المتغيرات المذكورة لكن هذه الطريقة قد تكون مكلفة جدا وعوضا عن ذلك يمكن طرح التساؤل التالي هل الحل المتوصل اليه هو حساس لهذه التغيرات أم لا؟

إذن فتحليل الحساسية يوفر المنهج الذي يمكن به تتبع آثار التغيرات المحدودة في قيم الثوابت وتحديد مدى حساسية أو عدم حساسية القرارات لهاته التغيرات أي يمكن من دراسة التغيرات في قيم ثوابت النموذج وتحديد إلى أي مدى يمكن لبعض هذه الثوابت أن تتذبذب قبل أن يصبح الحل الامثل حلا غير أمثل، وكلما ارتفعت درجة حساسية القرار بالنسبة للتغير في إحدى الثوابت كلما كان ذلك أدعى الى بذل مزيد من الجهد والوقت لتقدير قيمة هذه الثوابت بعناية حتى لا تبتعد كثيرا عن الامثلية فيما بعد.



جدول الحل النهائي

	X_1	X_2	X_3	S_1	m_2		
Z_0	D_1	D_2	D_3	y_1	y_2	Z_0	
X_2	a_N	1	0	a_{N1}	a_{N3}	X_2	
X_3	$a_{\acute{N}}$	0	1	a_{N2}	a_{N4}	X_3	

		$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} A_B^{-1} = \begin{pmatrix}a_{N1} & a_{N3}\\a_{N2} & a_{N4}\end{pmatrix} A_{HB} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$
تحليل الحساسية	1. **الطرف الأيمن**: تغير الموارد المتاحة b_i ونحسب بالقيم الجديدة عناصر الطرف الايمن الجديد فإذا كانت موجبة فقيم الحل تتغير فقط دون المرور الى مراحل جديدة وإن كانت القيم الجديدة سالبة نواصل عمليات السمبلكس.	$A_B^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_{\acute{2}}\\X_{\acute{3}}\end{pmatrix}$
	2. **دالة الهدف**: المعاملات c_j بفرض تغير C_1, C_2 بعد حساب قيم سطر الحل إذا وجدنا قيم سالبة فالحل يتواصل باختيار اكبر قيمة بالقيمة المطلقة كمتغير مرشح للدخول للقاعدة ونواصل العملية.	$\begin{pmatrix}X_2 & X_1\\c_2 & c_1\end{pmatrix} A_B^{-1} = (y_{\acute{1}} \quad y_{\acute{2}})$ $S \to y_{\acute{1}} - 0 = y_{\acute{1}}$ $m_2 \to y_{\acute{2}} - (-m) = y_{\acute{2}} + m$ القيود الثنائية: $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = c_{\acute{1}}$ $X_1 \to a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - c_{\acute{1}} = D_{\acute{1}}$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = c_{\acute{2}}$ $X_2 \to a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - c_{\acute{2}} = D_{\acute{2}}$ $a_{13}y_1 + a_{23}y_2 = c_{\acute{3}}$ $X_3 \to a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - c_{\acute{3}} = D_{\acute{3}}$
	3. **العوامل التقنية**: a_{ij} إذا افترضنا تغير العوامل a_{23}, a_{13} نذهب للقيد الثنائي الموالي للمتغير X_3 فإذا ظهرت قيمة سالبة في سطر الحل نواصل عمليات الحل أما إذا ظهرت قيمة موجبة أو معدومة فإن قيم الحل فقط تتغير ولسنا بحاجة إلى مراحل جديدة من جدول السمبلكس.	$a'_{13}y_1 + a'_{23}y_2 - c_3 = D_3$
	4. **ادخال متغير جديد** بفرض أننا أدخلنا متغير جديد X_4 معاملاته a_{24}, a_{14} و c_4 والقيد الثنائي الموالي	$a_{14}y_1 + a_{24}y_2 - c_4 \geq 0$

	نعوض فيه فإذا ظهرت قيمة سالبة نواصل عمليات الحل كما نقوم بحساب معاملات المتغير الجديد في الجدول النهائي.	$A_B^{-1}\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{N1} & a_{N3}\\a_{N2} & a_{N4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\end{pmatrix}$
	5. اضافة قيد جديد تتعلق بقبولية البرنامج وليس بأمثلية البرنامج وبفرض أن هناك قيد جديد حيث a_{31}, a_{32}, a_{33} و c_3 فإذا كان القيد محقق نضيفه للجدول بحيث نحافظ على الأعمدة الاحادية للمتغيرات الموجودة داخل القاعدة.	$a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3-c_3\leq 0$

مثال14:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

Max $Z_0=20X_1+10X_2$,

$X_1+2X_2\leq 40,$

$3X_1+2X_2\leq 60,$

$X_1,X_2\geq 0$

والجدول التالي يبين المرحلة النهائية في حل النموذج أعلاه:

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	?	?	?	?	?
?	?	?	α	$-\frac{1}{3}$	20

20	β	0	?	?	?

المطلوب:

1. أوجد قيم α،β وأتمم جدول السمبلكس؟
2. ما أثر ارتفاع العائد على X_2 من 10الى15؟
3. ما أثر انخفاض العائد علىX_1من 20 الى 10؟
4. ما هو أثر ارتفاع المورد الثاني من 60 الى 130؟
5. ما أثر تغير معاملاتX_1من(2 2)الى(2 1) ؟
6. بفرض ادخال متغير جديدX_3معاملاته(3 1)وC_3=30فما الجديد؟
7. بفرض اضافة قيد جديد$2X_1+3X_2 \geq 50$فما الذي يحدث؟

الحل:

1. ايجاد قيم α،βواتمام الجدول:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{3} \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow 40\alpha - \frac{60}{3} = 20 \Rightarrow \alpha = \alpha = 1$$

$$60\beta = 20 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

وجود عمود أحادي في العمود الاول والواحد في السطر الثاني يعني أنX_1داخل القاعدة في السطر الثاني و عمود أحادي معS_1يعني أن هذا المتغير داخل القاعدة في السطر الأول.

$$\begin{bmatrix} S1 & X1 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

الآن نعوض بقيمة حلول البرنامج الثنائي في قيود البرنامج الثنائي:

$$y_1 + 3y_2 - 20 = 0 + 3\left(\frac{20}{3}\right) - 20 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 10 = 0 + 2\left(\frac{20}{3}\right) - 10 = \frac{10}{3}$$

$$y_0 = 40y_1 + 60y_2 = 40(0) + 60\left(\frac{20}{3}\right) = 400$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20

2. ارتفاع العائد على X_2من10الى15:

$$[0 \quad 20]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0 \quad \frac{20}{3}]$$

$$y_1 + 3y_2 - 20 = 0 + 3\left(\frac{20}{3}\right) - 20 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 15 = 0 + 2\left(\frac{20}{3}\right) - 15 = -\frac{5}{3}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20

X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{4}$	425
X_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	15
X_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

أدى زيادة عائد X_2الى تغير الحل بعد ظهور قيمة سالبة على سطرZمما أدى الى زيادة مرحلة في الحل أفضت الدخولX_2الى القاعدة وتغير قيم الحل إلى:

Z_0=425

X_1=10

X_2=15

3. أثر انخفاض العائد علىX_1من 20 الى 10:

$$[0 \quad 10]\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = [0 \quad \frac{10}{3}]$$

$$y_1 + 3y_2 - 10 = 0 + 3\left(\frac{10}{3}\right) - 10 = 0$$

$$2y_1 + 2y_2 - 10 = 0 + 2\left(\frac{10}{3}\right) - 10 = -\frac{10}{3}$$

$$y_0 = 40y_1 + 60y_2 = 40(0) + 60\left(\frac{10}{3}\right) = 200$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	0	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	200
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20

X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	250
X_2	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	15
X_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

أدى انخفاض عائد X_2الى تغير الحل بعد ظهور قيمة سالبة على سطرZمما أدى الى زيادة مرحلة في الحل أفضت الدخولX_2الى القاعدة وتغير قيم الحل إلى: $X_1=10$ $Z_0=250$

$X_2=15$

4. أثر ارتفاع المورد الثاني من 60 الى 130:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{130}{3} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن أصبح فيه قيمة سالبة وهذا غير مقبول في البرمجة الخطية نظرا لعدم سلبية المتغيرات$X_1,X_2 \geq 0$وهذا يتطلب اخراجX_1من القاعدة وتغيير الحل.

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{130}{3}$
Z	0	30	20	0	800
S_2	0	-4	-3	1	10

X_1	1	2	1	0	40

بعد ارتفاع المورد الثاني لاحظنا ان الحل غير مجدي لذلك قمنا باجراء مرحلة جديدة للتخلص من القيمة السالبة في الطرف الأيمن وقد تغيرت عناصر الحل الى: $Z_0=800$

$X_1=40$

5. تغير معاملات X_2من(2 2)الى(2 1):

$$2y_1 + y_2 - 10 = 0 + \left(\frac{20}{3}\right) - 10 = -\frac{10}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	0	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	0	2	6	440
X_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	12
X_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	16

أدى تغير معاملات المتغير الثاني X_2الى ظهور قيمة سالبة في سطر الحلZ_0مما أدى الى مواصلة الحل لتصبح النتائج:

$Z_0=440$

$X_1=16$

$X_2=12$

6. ادخال متغير جديدX_3معاملاته(3 1)وC_3=30:

القيد الثنائي لهذا المتغير الجديد هو: $3y_1 + y_2 - 30 \geq 0 \Rightarrow 3(0) + \frac{20}{3} - 30 \geq 0$

$-\frac{70}{3} \geq 0$ وبالتالي يجب مواصلة الحل لأن قيمة المتغير الجديد سالبة في سطر الحلZ_0.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{70}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
Z_0	0	15	0	$\frac{70}{8}$	$\frac{30}{8}$	575
X_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{15}{2}$
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{35}{2}$

نتج عن ادخال متغير جديد تغير الحل ودخول هذا المتغير الجديد الى القاعدة وتحسن الحل ليصبح: $X_1 = \frac{35}{2}$ Z_0=575

$$X_3 = \frac{15}{2}$$

7. اضافة قيد جديد$2X_1+3X_2 \geq 50$:

لا تحقق الحلول هذا القيد وبالتالي يجب مواصلة الحل $2X_1 + 3X_2 \geq 50 \Rightarrow 2(20) + 3(0) \geq 50$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	20
S_3	-2	-3	0	0	1	-50
Z_0	0	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	400
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	20
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	20
S_3+2 X_1	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	-10
Z_0	0	0	0	8	2	380
S_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	12
X_1	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	16
X_2	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	6

بعد إضافة القيد الجديد تغير الحل بعد مواصلته ليصبح:

Z_0=380

X_1=16

X_2=6

مشكلة النقل

المحور الثالث: مشكلة النقل

1. **تعريف نموذج النقل:** يعتبر نموذج النقل أحد النماذج الشبكية ويتعلق بتوزيع السلع من أماكن توفرها الى أماكن طلبها وهو من النماذج الرياضية والمشتقة من النموذج البديل العام للبرمجة الخطية، فالمورد مثلا يقوم بنقل المواد من مخازنه الى مخازن المواد الأولية في الشركة التي تستخدم تلك المواد في الانتاج وبعد أن تنتهي الشركة من عملية تصنيعها تقوم بتوزيع المواد تامة الصنع من مخازنها الى مخازن العملاء من تجار جملة وتجزئة، ويركز كل طرف من الاطراف المكلف بنقل البضاعة الى ايصالها الى وجهتها بأقل تكلفة ممكنة لما لذلك من اسهام في تخفيض التكلفة الكلية للعمليات التي يقوم بها ولما يتحقق من قدرة تنافسية في مجال الأسعار.

أما منتجي الخدمات فيمكن أن يوصلوا خدماتهم للمستهلكين في أماكن تواجدهم بأقل تكلفة ممكنة سواء كان التوصيل مجاني أم لا وأفضل الأمثلة مكاتب سيارات الأجرة حيث أن غرفة العمليات الرئيسية للمكتب تعرف بالضبط أماكن تواجد سياراتها وتحرك السيارة للعميل من الموقع الأقرب اليه.

يتم نقل المواد من المنابع a_i الى الاتجاهات حيث الطلب هو b_j حيث أن نموذج النقل يفترض غالبا التساوي بين الطلب والعرض.

2. **النموذج الرياضي:** النوذج الرياضي العام هو كالآتي: $MinZ_0 = \sum C_{ij}X_{ij}$

في الحالة البسيطة حيث n=3,m=2 النموذج كالآتي:

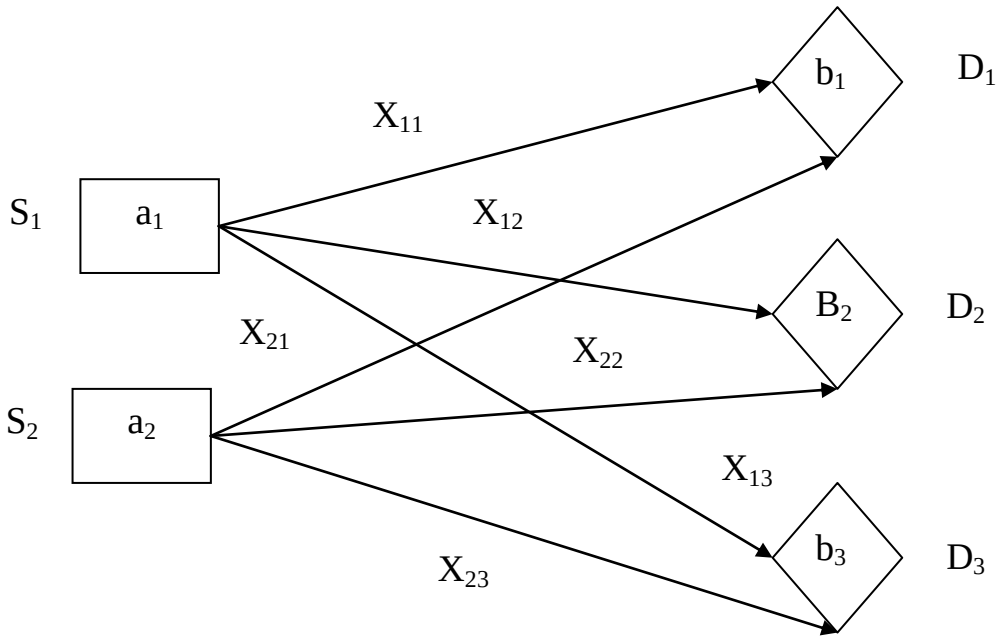
$$\sum X_{ij} = a_i$$

$$\sum X_{ij} = b_j$$

$$X_j \geq 0$$

$$S \cdot C \begin{Bmatrix} X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2 \end{Bmatrix}$$

$$D \cdot C \begin{Bmatrix} X_{11} + X_{21} = b_1 \\ X_{12} + X_{22} = b_2 \\ X_{13} + X_{23} = b_3 \end{Bmatrix}$$



$$MinZ_0 = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$i = 1,2$$

$$j = 1,2,3$$

نلاحظ من خلال النموذج أعلاه أن المسألة هي مسألة برمجة خطية يمكن حلها بالسمبلكس ولكن نظرا لعدد القيود وعدد المتغيرات يفضل حل المسألة بطريقة مغايرة(تقنية النقل).

3. **طريقة النقل:**

انطلاقا من المثال السابق حيث (m,n)=(2,3) نلاحظ:

Z_0	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	RHS
S.C	1	1	1	0	0	0	a_1
	0	0	0	1	1	1	a_2
D.C	1	0	0	1	0	0	b_1
	0	1	0	0	1	0	b_2
	0	0	1	0	0	1	b_3

تقنية النقل تعتمد على احترام الخطوات التالية:

أ. ايجاد الحل المبدئي ويتم بثلاث طرق:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية وتبدأ من الخانة في الأعلى الى اليسار ونقوم بتوزيع من اليسار الى اليمين ومن الأعلى إلى الأسفل حتى تكتمل الكميات المراد توزيعها والكميات المطلوبة يتم تلبتها ثم نحسب تكلفة النقل بهاته الطريقة ;
- طريقة أقل تكلفة ويتم التوزيع بداية بالخانة المقابلة لأقل تكلفة ثم نشطب السطر أو العمود الذي تشبع أي العرض ساوى الطلب وهكذا حتى يتم توزيع كل الكميات المعروضة على أماكن الطلب ثم نحسب تكلفة النقل الكلية ;

- طريقة فام وتتم بزيادة عمود وسطر لجدول النقل حيث نحسب فيه الفرق بين أقل قيمتين في السطر والعمود لكل سطر وعمود ثم نختار أكبر قيمة بين هاته القيم ثم نوزع في أقل خانة الموافقة لذلك السطر أو العمود وهكذا دواليك حتى يتم توزيع كل الكمية المعروضة على أماكن الطلب ونحسب التكلفة الكلية للنقل.

ب. التحقق من أن الحل نهائي أو يحتاج لمزيد من المراحل عن طريق حرف T على اليمين العناصر الموجودة داخل القاعدة أي التي وزعت عليها السلع وعلى اليسار العناصر خارج القاعدة وتمثل الخانات الفارغة ونقوم بفرض أن المعامل الأول معدوم نحسب بقية المعاملات ثم بالتعويض في الجهة اليسرى نقارن فغذا تحصلنا على جميع الاسطر سالبة أو معدومة فإن هذا الحل هو الحل الامثل، وفي حالة وجود أسطر موجبة نختار المتغير الأكبر من بينها ليتم ادخاله للقاعدة ونقوم بانشاء حلقة +-+- حيث نطرح اقل قيمة في الحلقة في الخانات التي توجد بها علامة الطرح ونضيفها في الخانات التي توجد بها علامة الزائد وهكذا نتحصل على حل جديد نقوم بفحصه.

عادة الحل الأمثل يتكون من عدد الخانات مساوي لمجموع عدد الاسطر وعدد الاعمدة مطروحا منه الواحد.

نعلم أن:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2$$

$$X_{11} + X_{21} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} = b_2$$
$$X_{13} + X_{23} = b_3$$

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	
Z_0	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	RHS
S.C	1	1	1	0	0	0	a_1
	0	0	0	1	1	1	a_2
D.C	1	0	0	1	0	0	b_1
	0	1	0	0	1	0	b_2
	0	0	1	0	0	1	b_3

انطلاقا من جدول السمبلكس أعلاه يمكن كتابة البرنامج المقابل أو الثنائي Dual كالآتي:

U_1 U_2 V_1 V_2 V_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_1 & V_1 \le C_{11} \\ U_1 & V_2 \le C_{12} \\ U_1 & V_3 \le C_{13} \\ U_2 & V_1 \le C_{21} \\ U_2 & V_2 \le C_{22} \\ U_2 & V_3 \le C_{23} \end{bmatrix}$$

$$Maxy_0 = (a_1U_1 + a_2U_2) + (b_1V_1 + b_2V_2 + b_3V_3)$$

المتغيرات بدون قيد وبالتالي في الحالة العامة:

$$Maxy_0 = \sum a_i u_i + \sum b_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

U_i, V_j بدون قيد على الاشارة

4. **جدول النقل:** هو جدول ترتيبي لمشكلة النقل وتتم معالجته للوصول الى أفضل توزيع تكون تكلفة النقل المرتبطة به أقل ما يمكن ويعتبر جدول النقل طريقة منظمة لعرض بيانات المشكلة مما يساعد في سرعة قرائتها ومعالجتها بإحدى الطرق.

الى / من	I	II	III	العرض
A	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
B	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
C	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	a_3
الطلب	b_1	b_2	b_3	$\sum a_i$ $\sum b_j$

مثال01:

يمتلك مصنع ثلاثة مستودعات C,B,A تمثل أماكن العرض وأن الطاقة الاستيعابية لها هي 300,350,250 وحدة على الترتيب فإذا كان المصنع يورد الى ثلاثة من كبار تجار الجملة يمثلون أماكن الطلب F,E,D بطاقة استيعابية مقدارها 400,300,200 وحدة على الترتيب وتكاليف النقل موضحة في الجدول التالي:

الى / من	D	E	F
A	5	4	3
B	7	5	6
C	5	6	9

المطلوب:

أوجد الحل المبدئي بالطرق الثلاث؟ ثم الحل الأمثل لتوزيع البضائع بأقل تكلفة؟

الحل:

ايجاد الحل المبدئي باستعمال طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الى / من	D	E	F	العرض
A	5 200	4 50	3	250
B	7	5 250	6 100	350
C	5	6	9 300	300
الطلب	200	300	400	900

$X_{11}=200$

$X_{12}=50$

$X_{22}=250$

$X_{23}=100$

$X_{33}=300$

$$Z_0 = 200(5) + 50(4) + 250(5) + 100(6) + 300(9) = 5750$$

ايجاد الحل المبدئي بطريقة أقل تكلفة:

الى / من	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5	6	350
C	5	6	9	300
الطلب	200	300	400	900

$X_{13}=250$

الى / من	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5	6	350
C	5 200	6	9	300

الطلب	200	300	150	650

$X_{31}=200$

من \ الى	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5 300	6 50	350
C	5 200	6	9 100	100
الطلب	200	300	150	450

$X_{22}=300$

$X_{23}=50$

$X_{33}=100$

$$Z_0 = 250(3) + 300(5) + 50(6) + 200(5) + 100(9) = 4450$$

إيجاد الحل بطريقة فام *Vam Vogel*

من \ الى	D	E	F	العرض	p_i
A	5	4	3 250	250	1
B	7	5	6	350	1
C	5	6	9	300	1

الطلب	200	300	400		900
Pj	2	1	3		

$X_{13}=250$

الى / من	D	E	F	العرض	p_i
A	5	4	3 250	250	
B	7	5	6 150	350	1
C	5	6	9	300	1
الطلب	200	300	150		650
Pj	2	1	3		

$X_{23}=150$

الى / من	D	E	F	العرض	p_i
A	5	4	3 250	250	
B	7	5 200	6 150	200	2
C	5	6	9	300	1

		200		100				
الطلب		200		300		150		500
Pj		2		1				

$X_{31}=200$

$X_{22}=200$

$X_{32}=100$

$$Z_0 = 250(3) + 200(5) + 150(6) + 200(5) + 100(6) = 4250$$

ملاحظة:

- نلاحظ من خلال الحلول المتحصل عليها من الطرق الثلاث السابقة أن طريقة فام أدت الى أحسن حل وهذا هو الحل السائد عموما.
- عدد المتغيرات القاعدية يساوي (m+n-1) أي عدد الاسطر مضافا اليه عدد الأعمدة مطروحا منه الواحد.
- في حالة عدد المتغيرات القاعدية يختلف عن (m+n-1) نحن في حالة الانحلالية وهذا يتطلب إضافة خلية جديدة أو متغير قاعدي جديد حتى نستطيع الحصول على الحل النهائي أو تحسين الحل.

نتحقق من أن الحل المبدئي بطريقة أقل تكلفة هو الأمثل أم نواصل الحل:

الى / من	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5 300	6 50	350
C	5 200	6	9 100	300
الطلب	200	300	400	900

نلاحظ أن عدد الحلول يساوي m+n-1=3+3-1=5

المتغيرات خارج القاعدة	المتغيرات داخل القاعدة
$X_{11}: u_1+v_1-5=0-1-5=-6$	$X_{13}: u_1+v_3=3$
$X_{12}: u_1+v_2-4=0+2-4=-2$	$X_{22}: u_2+v_2=5$
$X_{21}: u_2+v_1-7=3-1-7=-5$	$X_{23}: u_2+v_3=6$
$X_{32}: u_3+v_2-6=6+2-6=2>0$	$X_{31}: u_3+v_1=5$
	$X_{33}: u_3+v_3=9$

$u_1=0$ $v_1=-1$
$u_2=3$ $v_2=2$
$u_3=6$ $v_3=3$

نظرا لوجود متغير مرشح لدخول القاعدة وهو موجب وهو المتغير X_{32} ندخله للقاعدة وننظر الحل الجديد:

الى / من	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5 - 300	6 + 50	350
C	5 200	6 +	9 - 100	300
الطلب	200	300	400	900

الى / من	D	E	F	العرض
A	5	4	3 250	250
B	7	5 200	6 150	350

C	5		6		9		300
		200		100			
الطلب	200		300		400		900

$$Z_0 = 250(3) + 250(5) + 100(6) + 200(5) + 50(6) + 50(9) = 4350$$

نتحقق من أن الحل هو الأمثل:

المتغيرات خارج القاعدة	المتغيرات داخل القاعدة
$X_{11}: u_1+v_1-5=0+1-5=-4$	$X_{13}: u_1+v_3=3$
$X_{12}: u_1+v_2-4=0+2-4=-2$	$X_{22}: u_2+v_2=5$
$X_{21}: u_2+v_1-7=3+1-7=-3$	$X_{23}: u_2+v_3=6$
$X_{33}: u_3+v_3-9=4+3-9=-2$	$X_{31}: u_3+v_1=5$
	$X_{32}: u_3+v_2=6$

$u_1=0$ $v_1=1$
$u_2=3$ $v_2=2$
$u_3=4$ $v_3=3$

بما أن جميع المتغيرات خارج القاعدة قيمها سالبة فهذا هو الحل الامثل.

أ. **حالة الانحلالية:** نعلم أن الحل الأمثل في مسالة النقل هو الحل الذي يحوي m+n-1 من المتغيرات داخل القاعدة في حالة فقدان متغير أو أكثر من المتغيرات داخل القاعدة نحن في حاجة الى الرفع من هذه المتغيرات حتى تعادل m+n-1.

مثال 02:

ليكن جدول النقل التالي:

الى / من	S_1	S_2	S_3	S_4	العرض	P_i
I	10	0	20	11	15	10
II	12	7	9	20	25	2
III	0 5	14	16	18	5	14
الطلب	5	15	15	10	45	
P_j	10	7	7	7		

$X_{31}=5$

من \ الى	S_1	S_2	S_3	S_4	العرض	P_i
I	10	0 15	20	11	15	11
II	12	7	9 15	20 10	25	2
III	0 5	14	16	18	5	
الطلب	5	15	15	10	45	
P_j		7	11	9		

$X_{12}=15$

$X_{23}=15$

$X_{24}=10$

$m+n-1=3+4-1=6$

نحن في حاجة الى اضافة متغيرين الى المتغيرات القاعدية حتى نتحصل على الحل الأمثل.

من \ الى	S_1	S_2	S_3	S_4	العرض
I	10 ε	0 15	20	11	15
II	12	7 ε	9 15	20 10	25
III	0 5	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	45

$$Z_0 = 15(0) + 15(9) + 20(10) + 5(0) = 335$$

المتغيرات داخل القاعدة	المتغيرات خارج القاعدة
$X_{11}: u_1+v_1=10$	$X_{13}: u_1+v_3-20=0+10-20=-10$
$X_{12}: u_1+v_2=0$	$X_{14}: u_1+v_4-11=0+13-11=2$
$X_{22}: u_2+v_2=7$	$X_{21}: u_2+v_1-12=7+10-12=5$
$X_{23}: u_2+v_3=9$	$X_{32}: u_3+v_2-14=-10+0-14=-24$
$X_{24}: u_2+v_4=20$	$X_{33}: u_3+v_3-16=-10+2-16=-24$
$X_{31}: u_3+v_1=0$	$X_{34}: u_3+v_4-18=-10+10-18=-18$

$u_1=0$ $v_1=10$
$u_2=7$ $v_2=0$
$u_3=-10$ $v_3=2$
$v_4=13$

نلاحظ وجود متغيرات خارج القاعدة موجبة والمرشح للدخول هو أكبر موجب ويقابل X_{21}

من \ الى	S_1	S_2	S_3	S_4	العرض
I	10 - ε	0 + 15	20	11	15
II	12 +	7 - ε	9 15	20 10	25
III	0 5	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	45

من \ الى	S_1	S_2	S_3	S_4	العرض
I	10	0 15	20	11 ε	15
II	12 ε	7	9 15	20 10	25
III	0 5	14	16	18	5
الطلب	5	15	15	10	45

المتغيرات خارج القاعدة	المتغيرات داخل القاعدة
$X_{11}: u_1+v_1-10=0+3-10=-7$	$X_{12}: u_1+v_2=0$
$X_{13}: u_1+v_3-20=0+0-20=-20$	$X_{14}: u_1+v_4=11$
$X_{22}: u_2+v_2-7=9+0-7=2$	$X_{21}: u_2+v_1=12$
$X_{32}: u_3+v_2-14=-3+0-14=-17$	$X_{23}: u_2+v_3=9$
$X_{33}: u_3+v_3-16=-3+0-16=-19$	$X_{24}: u_2+v_4=20$
$X_{34}: u_3+v_4-18=-3+11-18=-10$	$X_{31}: u_3+v_1=0$

$u_1=0$ $v_1=3$
$u_2=9$ $v_2=0$
$u_3=-3$ $v_3=0$
$v_4=11$

نلاحظ أن المتغير X_{22} مرشح لدخول القاعدة:

العرض	S_4	S_3	S_2	S_1	الى / من
15	11 + ε	20	0 - 15	10	I
25	20 - 10	9 15	7 +	12 ε	II
5	18	16	14	0 5	III
45	10	15	15	5	الطلب

نقوم بتدوير 10 وحدات عبر مسار الحلقة.

العرض	S_4	S_3	S_2	S_1	الى / من
15	11 10	20	0 5	10	I
25	20	9 15	7 10	12 ε	II
5	18	16	14	0	III

	5				
الطلب	5	15	15	10	45

$$Z_0 = 5(0) + 10(11) + 10(7) + 15(9) + 5(0) = 315$$

المتغيرات خارج القاعدة	المتغيرات داخل القاعدة
$X_{11}: u_1+v_1-10=0+5-10=-5$	$X_{12}: u_1+v_2=0$
$X_{13}: u_1+v_3-20=0+2-20=-18$	$X_{14}: u_1+v_4=11$
$X_{24}: u_2+v_4-20=7+11-20=-2$	$X_{21}: u_2+v_1=12$
$X_{32}: u_3+v_2-14=-5+0-14=-19$	$X_{22}: u_2+v_2=7$
$X_{33}: u_3+v_3-16=-5+2-16=-19$	$X_{23}: u_2+v_3=9$
$X_{34}: u_3+v_4-18=-5+11-18=-12$	$X_{31}: u_3+v_1=0$

$u_1=0$ $v_1=5$
$u_2=7$ $v_2=0$
$u_3=-5$ $v_3=2$
$v_4=11$

الحل الأمثل هو 315.

ب. **عدم تساوي العرض والطلب** : نعلم أن النموذج الكلاسيكي للنقل يفترض تساوي مجموع الطلب ومجموع العرض لكن في الواقع غالبا ما تحدث حالات لا يتساوى فيها الطلب والعرض وهذا لا يطرح مشكلا كبيرا بحيث يمكن فتح مصدر وهمي في حالة الطلب أكبر من العرض أو فتح اتجاه وهمي في حالة العرض أكبر من الطلب.

مثال 03:

ليكن جدول النقل التالي:

الى / من	S_1	S_2	S_3	اتجاه وهمي S_4	العرض	P_i
I	2	1	2	0	20	1
II	1	2	3	0	9	1
III	4	2	1	0	11	1
الطلب	10	8	15	7		
P_j	1	1	1	0		

أوجد الحل المبدئي لمسالة النقل؟

نلاحظ أن أن العرض أكبر من الطلب لذلك نضيف عمود وهمي بتكاليف معدومة.

الى / من	S_1	S_2	S_3	اتجاه وهمي S_4	العرض	P_i
I	2	1 8	2	0 7	12	2
II	1	2	3	0	9	1
III	4	2	1	0	11	1
الطلب	10	8	15	7		
P_j	1	1	1	0		

الى / من	S_1	S_2	S_3	اتجاه وهمي S_4	العرض	P_i
I	2	1 8	2	0 7	5	0
II	1	2	3	0	9	2
III	4	2	1 11	0	11	3
الطلب	10	8	15	7		
P_j	1	1	1	0		

الى / من	S_1	S_2	S_3	اتجاه وهمي S_4	العرض	P_i
I	2 / 1	1 / 8	2 / 4	0 / 7	5	0
II	1 / 9	2	3	0	9	2
III	4	2	1 / 11	0	11	
الطلب	10	8	4	7		
P_j	1		1			

الى / من	S_1	S_2	S_3	اتجاه وهمي S_4	العرض
I	2 / 1	1 / 8	2 / 4	0 / 7	5
II	1 / 9	2	3	0	9
III	4	2	1 / 11	0	11
الطلب	10	8	4	7	

$$Z_0 = 1(2) + 8(1) + 4(2) + 7(0) + 9(1) + 11(1) = 38$$

تعاد الكمية 7 في الاتجاه الوهمي الى المصدر وهكذا يتم حل مشكل العرض أكبر من الطلب.

مثال 04:

اليك جدول النقل التالي:

العرض	S_3	S_2	S_1	الى / من
10	10	8	6	I
10	11	9	12	II
10	13	0	16	III
	11	11	11	الطلب

أوجد الحل المبدئي لمسألة النقل هاته؟

P_i	العرض	S_3	S_2	S_1	الى / من
2	10	10	8	6	I
2	10	11	9	12	II
13	10	13	0 10	16	III
	3	0	0	0	IV المصدر الوهمي
		11	11	11	الطلب
		10	8	6	p_J

الى / من	S_1	S_2	S_3	العرض	P_i
I	6	8	10	10	2
II	12	9	11	10	2
III	16	0 10	13	10	
IV المصدر الوهمي	0	0	0 3	3	
الطلب	11	1	11		
p_J	6	8	10		

الى / من	S_1	S_2	S_3	العرض	P_i
I	6 10	8	10	10	2
II	12 1	9 1	11 8	10	2
III	16	0 10	13	10	
IV المصدر الوهمي	0	0	0 3	3	
الطلب	11	1	8		
p_J	6	1	1		

الى / من	S_1	S_2	S_3	العرض
I	6 — 10	8	10	10
II	12 — 1	9 — 1	11 — 8	10
III	16	0 — 10	13	10
IV المصدر الوهمي	0	0	0 — 3	3
الطلب	11	1	8	

$$Z_0 = 10(6) + 1(12) + 1(9) + 8(11) + 10(0) + 3(0) = 169$$

ملاحظة:

إن الصف الوهمي أو العمود الوهمي هي مشابهة للمتغيرات الاصطناعية من مشكلات البرمجة الخطية التي تطرقنا لها سابقا.

5. حالات خاصة في مشكلة النقل

أ. **نموذج إعادة النقل** في هذا النموذج يفترض أن كل مصدر يلعب في نفس الوقت دور مصدر وإتجاه لوحظ أن النقل المباشر في بعض الحالات يكون غير إقتصادي ويفضل النقل غير المباشر في هذه الحالة يصبح النموذج مضخم والكميات المتاحة في كل مصدر (في كل اتجاه) ترفع بالكمية الاجمالية للعرض (الطلب).

مثال05:

ليكن جدول النقل بالاضافة الى جداول تكاليف نقل البضائع بين المصادر نفسها وبين الاتجاهات:

الى / من	S_1	S_2	S_3	العرض
I	10	20	30	100
II	20	50	40	200
الطلب	100	100	100	

من \ الى	I	II
I	0	20
II	10	0

من \ الى	I	II
S_1	6 10	8
S_2	12 1	9 1
S_3	16	0 10

من \ الى	S_1	S_2	S_3
I	0	40	10
II	10	0	20
III	80	20	0

المطلوب:

أوجد حل مسألة النقل ومسألة إعادة النقل؟ماذا تلاحظ ؟

الحل:

الى / من	S_1	S_2	S_3	العرض	P_i
I	10 ε	20 100	30	100	10
II	20 100	50	40 100	200	20
الطلب	100	100	100		
P_j	10	30	10		

$$Z_0 = 100(20) + 100(20) + 100(40) = 8000$$

المتغيرات خارج القاعدة	المتغيرات داخل القاعدة
$X_{13}: u_1+v_1-30=0+30-30=0$ $X_{22}: u_2+v_2-50=10+20-50=-20$	$X_{11}: u_1+v_1=10$ $X_{12}: u_1+v_2=20$ $X_{21}: u_2+v_1=20$ $X_{23}: u_2+v_3=40$

$u_1=0$ $v_1=10$
$u_2=10$ $v_2=20$
$v_3=30$

نلاحظ أن الحل هو حل نهائي والآن نقوم بحل نموذج إعادة النقل.

باستخدام طريقة فام:

نقوم باضافة قيمة العرض الاجمالي أو الطلب الاجمالي في جميع صفوف العرض أو أعمدة الطلب.

	المصنع الأول	المصنع الثاني	المخزن I	المخزن II	المخزن III		
المصنع الأول	0	20	10	20	30	400	10
المصنع الثاني	10	0	20	50	40	500	10
المخزن I	20	30	0	40	10	300	10

المخزن II	40	20	10	0 300	20	300	10
المخزن III	50	70	80	20	0	300	20
	300	300	400	400	400		p_i
	10	20	10	20	10	p_j	

$X_{44}=300$

0	20	10	20 100	30	400	10
10	0	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0	300	20
300	300	400	100	400		p_i
10	20	10	20	10	p_j	

$X_{14}=100$

0	20	10	20	30	300	10
10	0 300	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0	300	20
300	300	400		400		p_i
10	20	10		10	p_j	

X_{22}=300

0	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20		

50	70	80	20	0 300	300	20	
300		400		400		p_i	
10		10		10	p_j		

X_{55}=300

0	20	10	20	30	300	10	
10	0	20	50	40	200	10	
20	30	0	40	10 100	300	10	
40	20	10	0	20			
50	70	80	20	0			
300		400		100		p_i	
10		10		20	p_j		

X_{35}=100

0	20	10	20	30	300	10	
10	0	20	50	40	200	10	

20	30	0 200	40	10	200	20
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0		
300		400				p_i
10		10			p_j	

X_{33}=200

0 300	20	10	20	30	300	10
10	0	20	50	40	200	10
20	30	0	40	10		
40	20	10	0	20		
50	70	80	20	0		

300		200				p_i
10		10			p_j	

X_{11}=300

0	20	10	20	30	
10	0	20 200	50	40	200
20	30	0	40	10	
40	20	10	0	20	
50	70	80	20	0	
		200			

X_{23}=200

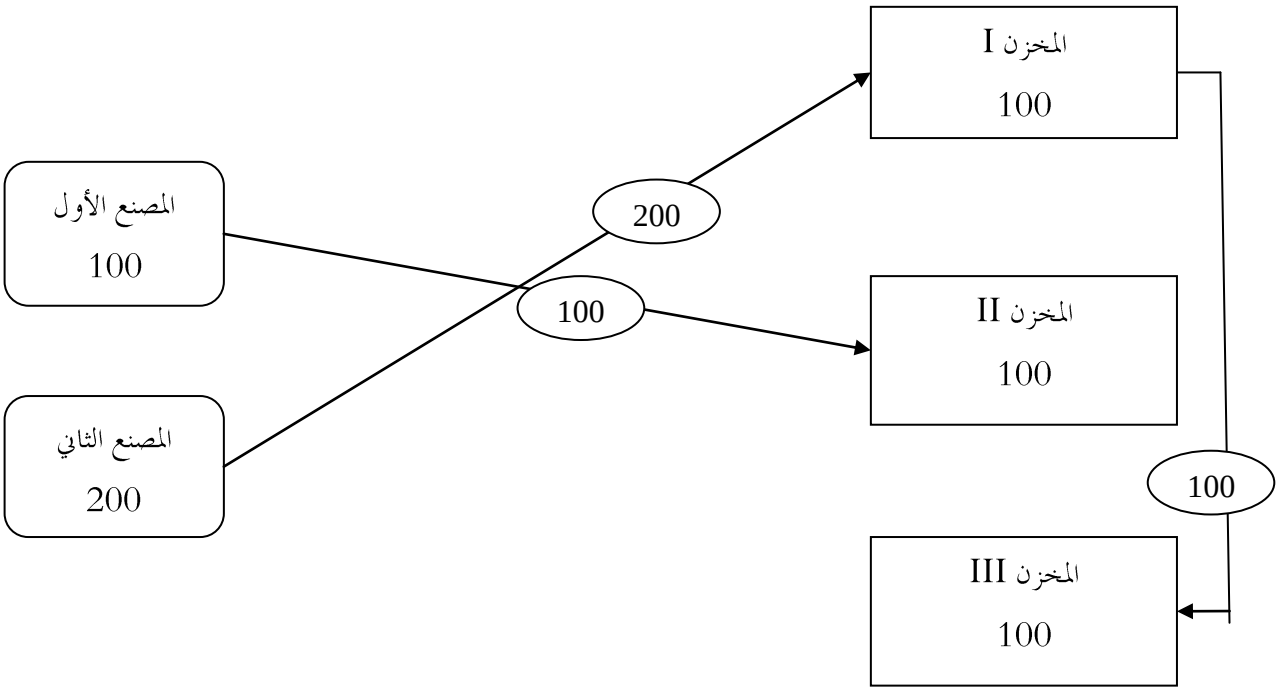
0 300	20	10	20 100	30	400
10	0 300	20 200	50	40	500
20	30	0	40	10	300

		200		100	
40	20	10	0 300	20	300
50	70	80	20	0 300	300
300	300	400	400	400	

$Z_0=20(100)+20(200)+10(100)=7000$

الكميات التي توجد في قطر الجدول كلها معدومة نظرا لعدم نقل السلعة بل تبقى في نفس المكان وبالتالي تكلفتها معدومة.

نلاحظ أن نموذج إعادة النقل أقل تكلفة من نموذج النقل المباشر ونوضح عملية إعادة النقل بالرسم البياني التالي:



ب. **نموذج تقليل الفترة الزمنية**

هذا النموذج يهدف إلى نقل الموارد حيث الهدف هو تقليل فترة النقل.

دالته الرياضية: $Min\ Tk for\ all\ k$

				a_i
1	t_{11}	t_{12}	t_{1n}	a_1
2	t_{21}	t_{22}	t_{2n}	a_2

.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
m	t_{n1}	t_{n2}	t_{mn}	a_n

ويتم عبر الخطوات التالية:

- ايجاد الحل المبدئي عن طريق الزاوية الشمالية الغربية ;
- حساب$Max\ t_{ij}$ عبر ممر الحل المبدئي ونشطب على جميع الخلايا حيث t_{ij} أكبر أو يساوي $Max\ t_{ij}$;
- تحسين الحل باستبدال الاشارة -+-+ تبدأ في الخلية Max tij واذا لم نستطع استبدال الاشارة واقامة الحلقة فيعني أن العملية انتهت وهذا هو الحل الأمثل.

مثال06:

شركة لإنتاج الألبان تمتلك ثلاثة معامل إنتاجية القدرة الانتاجية لكل معمل هي (110,80,100) وحدة يوميا على التوالي وعلى الشركة أن تجهز أربعة مراكز استهلاكية بكمية مقدارها (100,50,60,80) وحدة يوميا على التوالي هدف الشركة هو توزيع منتجاتها على المراكز الاستهلاكية بأسرع وقت ممكن وذلك تجنبا لتلف المنتوجات مع العلم أن الوقت المتطلب لإيصال المنتج الواحد من المعمل الى المراكز الاستهلاكية هو (1,3,2,1) ساعة على التوالي ومن المعمل الثاني هو (3,4,2,2) ساعة على التوالي ومن المعمل الثالث هو (2,4,3,3) ساعة على التوالي.

المطلوب:

1. أوجد التوزيع الأمثل للمنتوجات والذي يحقق أقل وقت ممكن لتوزيع المنتوجات؟

أولا نقوم بالحل المبدئي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	المركز الاستهلاكي 1	المركز الاستهلاكي 2	المركز الاستهلاكي 3	المركز الاستهلاكي 4	
100	1	2	3	1 100	المعمل الأول
80	2	2 30	4 50	3	المعمل الثاني
110	3	3	4	2	المعمل

	80	30			الثالث
	80	60	50	100	

Max t_{ij}(1,4,2,3,3)=4 Tk_1=4

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

100	1	2	3 +	1 - 100
80	2	2 30	4 - 50	3 +
110	3 80	3 30	4	2
	80	60	50	100

100	1	2	3 50	1 50
80	2	2 30	4	3 50
110	3 80	3 30	4	2
	80	60	50	100

Max t_{ij}(1,3,3,2,3,3)=3 Tk_2=3

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي Max t_{ij} نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند Max t_{ij}:

100	1	2	3 50	1 50

3 - 50	4	2 + 30	2	80
2 +	4	3 - 30	3 80	110
100	50	60	80	

1 50	3 50	2	1	100
3 20	4	2 60	2	80
2 30	4	3	3 80	110
100	50	60	80	

$Max\ t_{ij}(1,3,3,2,2,3)=3$ $Tk_3=3$

نشطب جميع الخلايا الفارغة التي قيمتها أكبر أو تساوي $Max\ t_{ij}$ نقوم بتكوين حلقة -+-+ تبدأ عند $Max\ t_{ij}$:

1 50	3 50	2	1	100
3 - 20	4	2 60	2 +	80
2 + 30	4	3	3 - 80	110
100	50	60	80	

1 50	3 50	2	1	100
3	4	2 60	2 20	80
2 50	4	3	3 - 60	110
100	50	60	80	

Max $t_{ij}(1,3,2,2,2,3)=3$ $Tk_4=3$

لا يمكن اقامة الحلقة وبالتالي فهذا هو الحل الأمثل والمسار الذي يقلل الزمن.

ج. نموذج التخصيص:

يتمثل النموذج في تخصيص عمال على مجموعة من المكائن أو تخصيص مشاريع على مجموعة من المقاولين ويهدف هذا النوع من مسائل النقل الى التخصيص بأقل تكلفة إجمالية، إن العمال (الأعمال) تمثل هنا مصادر التجهيز والمكائن تمثل مراكز الطلب والعرض المتوفر لكل مصدر من مصادر التجهيز يساوي وحدة واحدة، وكذلك الطلب لكل مركز يساوي وحدة واحدة علما بأن تكلفة تخصيص عمل i الى الماكنة هي عبارة عن Cij وفي حالة عدم إمكانية تخصيص عمل إلى أي ماكنة تكون التكلفة مساوية الى ما لا نهاية.

	1	2	3	.....	n	العرض
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	.....	C_{1n}	1
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	.....	C_{2n}	1
3	.					1
.	.					.
.	.					.
n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	.....	C_{nn}	1
الطلب	1	1	1	.....	1	

ويتم حل نموذج التخصيص عبر الخطوات التالية:

- في مصفوفة التكاليف الاصلية نوجد أقل تكلفة في كل صف من صفوف المصفوفة ومن ثم نطرح هذه القيمة من قيم الصف فإذا حصلنا على عدد من الاصفار كاف نكتفي .
- اذا لم يكن عدد الاصفار كاف نقوم بايجاد أقل قيمة لكل عمود ثم نطرحها من العمود نفسه فإذا حصلنا على عدد من الاصفار كاف نكتفي .
- اذا لم يكن عدد الاصفار كاف نقوم بشطب أكبر عدد من الاصفار بأقل عدد من الخطوط ثم نوجد أقل قيمة غير مشطوبة نطرحها من باقي القيم غير المشطوبة ونضيفها في تقاطع خطوط التشطيب.

مثال07:

مؤسسة تجارية لديها أربعة رجال بيع يراد توزيعهم على أربعة مناطق مختلفة فإذا كان تقدير إدارة المؤسسة للأرباح اليومية لكل رجل بيع في كل منطقة بعد دراسة جدوى مقدرة في الجدول التالي:

	I	II	III	IV
أحمد	16	10	14	11
اسلام	14	11	15	15
رضا	15	15	13	12
محمود	13	12	14	15

المطلوب: أوجد التخصيص الأمثل لرجال البيع على المناطق المختلفة؟

	I	II	III	IV	p_i
أحمد	16	10	14	11	10
اسلام	14	11	15	15	11
رضا	15	15	13	12	12
محمود	13	12	14	15	12

	I	II	III	IV
أحمد	6	0	4	1
اسلام	3	0	4	4
رضا	3	3	1	0
محمود	1	0	2	3
q_j	1	0	1	0

	I	II	III	IV
أحمد	5	0	3	1
اسلام	2	0	3	4
رضا	2	3	0	0
محمود	0	0	1	3

	I	II	III	IV
أحمد	4	0	2	0
اسلام	1	0	2	3
رضا	3	4	0	0
محمود	0	0	1	3

$Z_0=11+11+13+13=48$

نظرية الالعاب

المحور الرابع: نظرية الالعاب

1. عموميات:

تعني كلمة مباراة المنافسة بين جهتين أو أكثر وفقا لقاعدة محددة مسبقا حيث أن كل جهة أو منافس يمتلك مجموعة من الاستراتيجيات التي تساعده في الحصول على نتائج أفضل.

كل لاعب يختار استراتيجية واحدة أو مزيج من الاستراتيجيات ويعلم كل لاعب الاستراتيجيات (الخيارات) المتاحة للخصم لكن اللاعب يجهل اللعبة المفضلة من طرف الخصم.

اللعبة قد تكون نتيجتها ربح أو خسارة أو تعادل.

يعود تطوير نظرية الالعاب الى الحرب العالمية الثانية على يد الرياضي Von Neuman والاقتصادي Oscar والرياضي Emile Borel .

الاختيارات لجميع المتنافسين تغطي قيمة اللعبة في حين أن اللعبة بين متنافسين حيث الربح (الخسارة) للاعب ما يعادل تماما خسارة (ربح) اللاعب الآخر.

عدد الاستراتيجيات قد يكون محدود أو غير محدود (غالبا ما يكون محدود)واللعبة تمثل عن طريقة مصفوفة تسمى بمصفوفة اللعبة.

اللعبة غالبا ما تعبر عن حساب اللاعب A وبالتالي المصفوفة كالآتي:

$$\begin{matrix} & B \\ A & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال01:

في حالة رمي قطعتين من النقود. (Heads and Tails)

		B	
		H	T
A	H	1	0
	T	0	1

2. أسلوب MinMax (MaxMin)**:**

مثال02:

لتكن مصفوفة اللعب التالية:

		B			
		1	2	3	4
A	S1	8	2	9	5
	S2	6	5	7	8
	S3	7	3	-4	7

بتطبيق أسلوب MaxMin (MinMax) نجد:

		B				
		1	2	3	4	
A	S1	8	2	9	5	2
	S2	6	5	7	8	5
	S3	7	3	-4	7	-4
		8	5	9	8	

بالنسبة للاعب A وعند إختياره للإستراتيجية الأولى من الممكن أن يربح (8,2,9,5) على التوالي لكن في كل الحالات A يضمن Min(8,2,9,5)=2 وعند إختياره للإستراتيجية الثانية يضمن على الأقل Min(6,5,7,8)=5 وعند إختياره للإستراتيجية الثالثة يضمن اللاعب A ,Min(7,3,-4,7)=-4 .

أما المنافس وعند إختياره الاستراتيجية الأولى نلاحظ أنه يخسر 8 لذلك يختار الاستراتيجية الثانية وهي أقل خسارة وتكون نتيجة اللعب $V^*=5$

في حالة التساوي بين MinMax=MaxMin تسمى لعبة بنقطة التوازن وكل لاعب يلعب استراتيجية واحدة، أما في حالة عدم وجود نقطة توازن كل لاعب يضطر أن يلعب أكثر من استراتيجية واحدة وهذه الاختيارات ما هي إلا إستعمال الاستراتيجيات بنسب (احتمالات) محددة $x_1,x_2,\ldots x_i$.

$\sum x_i = 1$ وبالنسبة للمنافس $\sum y_i = 1$.

مثال03:

لتكن مصفوفة اللعب الآتية:

		B				
		S1	S2	S3	S4	Min
A	S1	5	-10	9	0	-10
	S2	6	7	8	1	1
	S3	8	7	15	2	2
	S4	3	4	-1	4	-1
	Max	8	7	15	4	

نلاحظ أنه لا توجد نقطة توازن وكل لاعب يضطر أن يلعب جميع الاستراتيجيات باحتمالات مختلفة.

		B				
		y_1	y_2	y_3	y_4	Min
A	x_1	5	-10	9	0	-10
	x_2	6	7	8	1	1
	x_3	8	7	15	2	2
	x_4	3	4	-1	4	-1
	Max	8	7	15	4	

3. **حل اللعبة بمزج الاستراتيجيات**

أ. **الحل البياني:** يصلح فقط اذا كان عدد الأعمدة أو الأسطر يساوي اثنين ففي حالة 2xn نمثل المستقيمات ثم نختار أكبر أو أعلى تقاطع في الغلاف السفلي أما في حالة mx2 نمثل المستقيمات ونختار أقل قيمة أو التقاطع الأقرب للمحور العمودي من الغلاف الخارجي أو الأيمن بعد تحديد احداثيات الحل نعوض في احدى معادلات التقاطع الذي خلف الحل لنحسب قيمة اللعبة.

حالة 2xn

	y_1	y_2	y_3
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}

$x_1+x_2=1$ ومنه $x_2=1-x_1$

الربح المتوقع لـ A	استراتيجيات B
$a_{11}x_1+a_{21}x_2=v$	1
$a_{12}x_1+a_{22}x_2=v$	2
.	.
.	.
$a_{1n}x_1+a_{2n}x_2=v$	n

الربح المتوقع لـ A	استراتيجيات B
$a_{11}x_1+a_{21}(1-x_1)=v$	1
$a_{12}x_1+a_{22}(1-x_1)=v$	2
.	.
.	.
$a_{1n}x_1+a_{2n}(1-x_1)=v$	n

الربح المتوقع لـ A	استراتيجيات B
$(a_{11} - a_{21})x_1+a_{21}=v$	1
$(a_{12} - a_{22})x_1+a_{22}=v$	2
.	.

.	.
n	$(a_{1n}- a_{2n})x_1+a_{2n}=v$

الحالة mx2

		B	
		y_1	y_2
A	1	a_{11}	a_{12}
	2	a_{21}	a_{22}
	3	a_{31}	a_{32}
	4	a_{41}	a_{42}

استراتيجيات A	الربح المتوقع لـ B
1	$(a_{11}-a_{12})y_1+ a_{12}=v$
2	$(a_{21}-a_{22})y_1+ a_{22}=v$
3	$(a_{31}-a_{32})y_1+ a_{32}=v$
4	$(a_{41}-a_{42})y_1+ a_{42}=v$

مثال04:

ان حصيلة المنافسة بين اثنين من المؤسسات Y,X أدت الى ظهور مصفوفة الدفع التالية:

المؤسسة Y			المؤسسة X
y_2	y_1		
5	-2	x_1	
-3	2	x_2	

المطلوب: أوجد قيمة اللعبة باستعمال الطريقة البيانية؟

الحل:

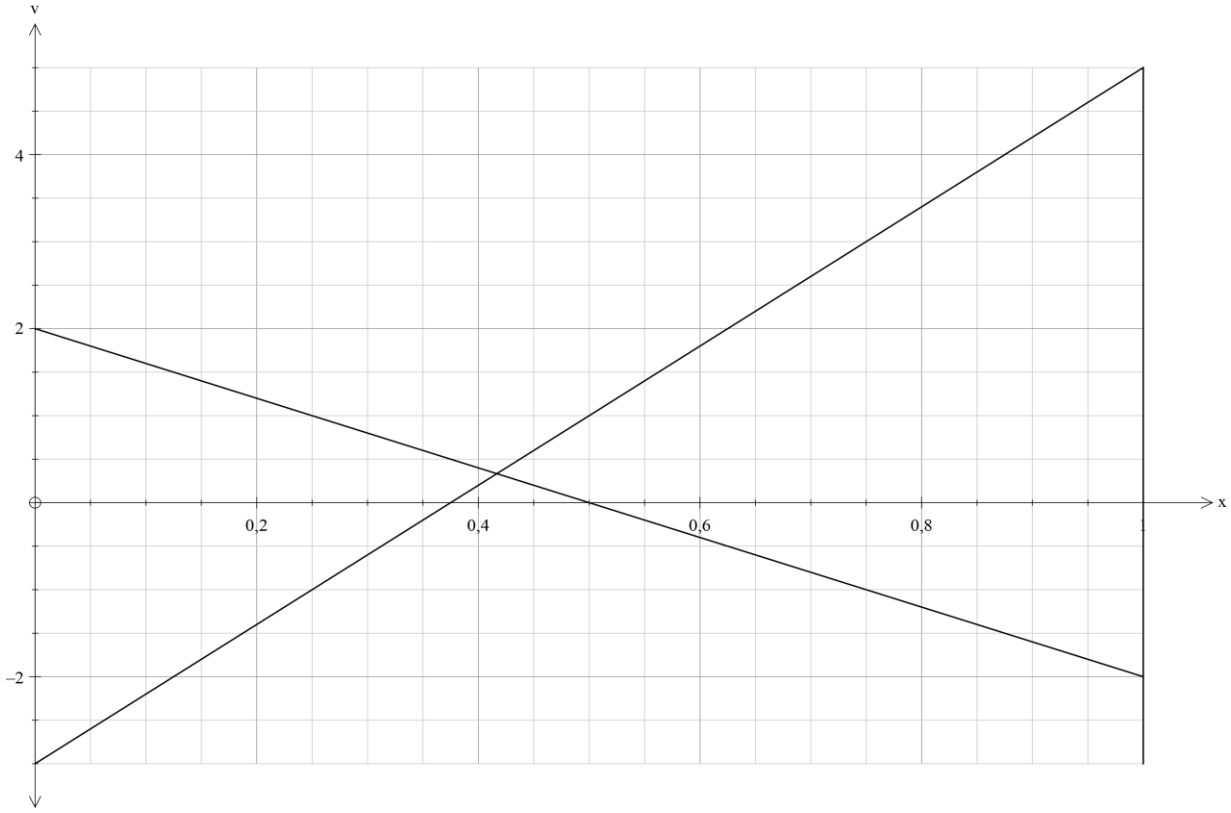
المؤسسة Y			المؤسسة X
y_2	y_1		
5	-2	x_1	
-3	2	x_2	

A payoff	B strategy
$(-2-2)x_1+2=v$	1
$(5-(-3))x_1+(-3)=v$	2

A payoff	B strategy
$-4x_1+2=v$	1
$8x_1+(-3)=v$	2

x_1	0	1
v	2	-2

x_1	0	1
v	-3	5



نلاحظ وجود نقطة وحيدة للتقاطع في الغلاف السفلي نظرا لوجود مستقيمين فقط.

$$-4x_1 + 2 = 8x_1 - 3 \Rightarrow 12x_1 = 5$$

$$x_1 = \frac{5}{12}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{12}$$

$$v = 8(x_1) - 3 = 8\left(\frac{5}{12}\right) - 3 = \frac{1}{3}$$

إذن حلول اللعبة هي: $x_1 = \frac{5}{12}, x_2 = \frac{7}{12}, v = \frac{1}{3}$

مثال05:

تتنافس مؤسستين في السوق ولكل مؤسسة استراتيجيات لمواجهة الأخرى كما يوضح الجدول التالي:

	المؤسسة B	
	T_1	T_2

2	1	S_1	المؤسسة A
5	3	S_2	
4	-3	S_3	
-6	7	S_4	

المطلوب: أوجد الحل البياني للمصفوفة اللعبة؟

الحل:

	المؤسسة B		
T_2	T_1		
2	1	S_1	المؤسسة A
5	3	S_2	
4	-3	S_3	
-6	7	S_4	

A strategy	B payoff
1	$(1-2)y_1+2=v$
2	$(3-5)y_1+5=v$
3	$(-3-4)y_1+4=v$
4	$(7-(-6))y_1+(-6)=v$

A strategy	B payoff
1	$-1y_1+2=v$

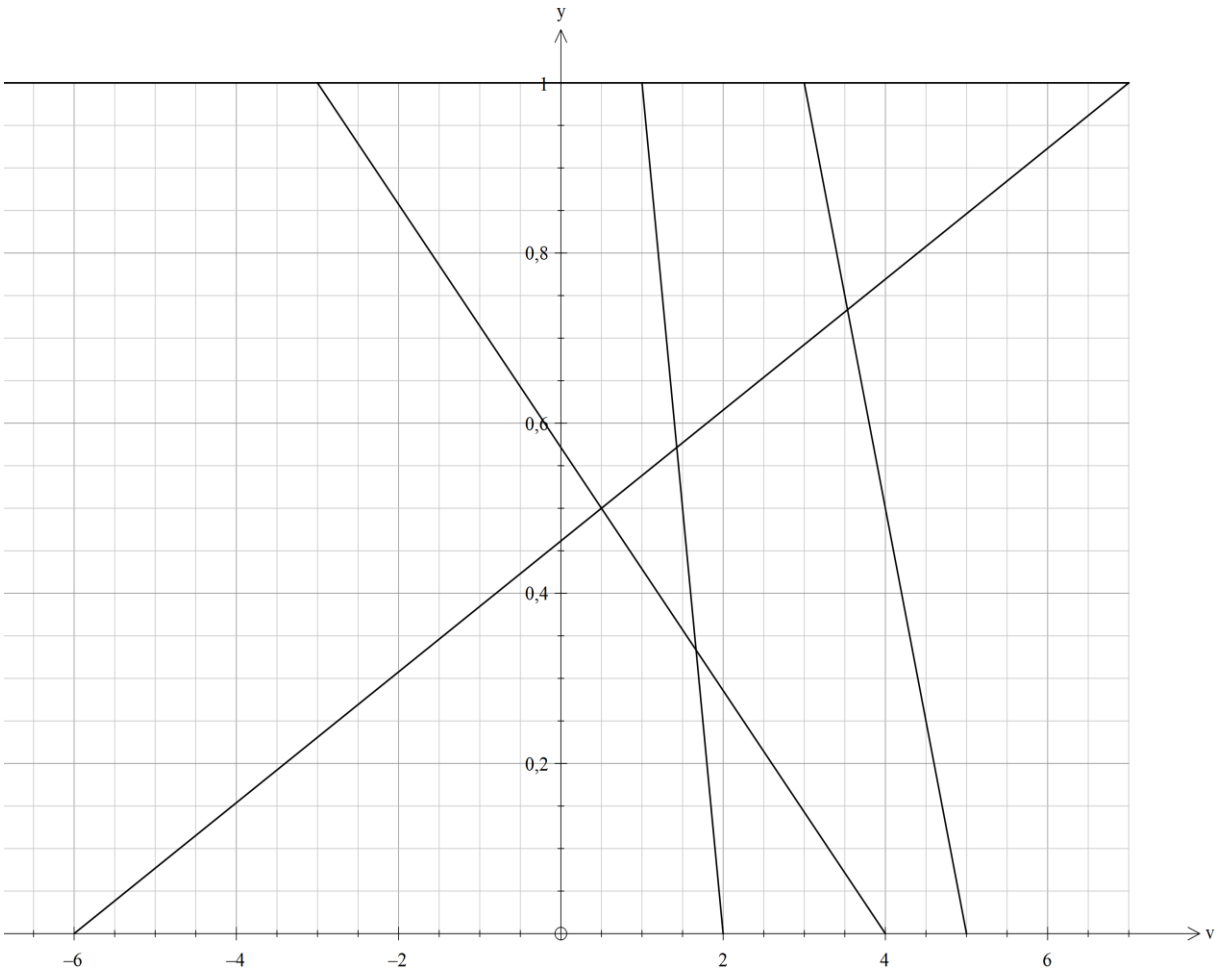
2	$-2y_1+5=v$
3	$-7y_1+4=v$
4	$13y_1-6=v$

y_1	0	1
v	2	1

y_1	0	1
v	5	3

y_1	0	1
v	4	-3

y_1	0	1
v	-6	7



نأخذ نقطة التقاطع أقصى اليسار في الغلاف الأيمن وهنا توجد نقطة واحدة وهي تقاطع للمستقيمين الثاني والرابع.

$$-2y_1 + 5 = 13Y_1 - 6 \Rightarrow 15y_1 = 11$$

$$y_1 = \frac{11}{15}$$

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{4}{15}$$

$$v = 13\left(\frac{11}{15}\right) - 6 = \frac{53}{15}$$

ومنه حلول اللعبة هي: $y_1 = \frac{11}{15}, y_2 = \frac{4}{15}, v = \frac{53}{15}$

ب. معيار الهيمنة: في حالة عدد الاسطر وعدد الاعمدة معا أكبر من اثنين يأتي أسلوب الهيمنة لتقليص المصفوفة اما أعمدة أو عدد الأسطر حتى يتوفر لدينا العدد اثنين من الاسطر أو الاعمدة وذلك بالتخلي عن بعض الاستراتيجيات غير المربحة أو التي تؤدي الى خسارة كبيرة ويمكن أن نستخدم المتوسط المرجح للمفاضلة بين استراتيجيتين أو أكثر مقارنة باستراتيجية واحدة.

مثال06:

لتكن مصفوفة اللعبة التالية:

		المؤسسة B		
		T_1	T_2	T_3
المؤسسة A	S_1	1	2	6
	S_2	3	5	7
	S_3	-3	4	9
	S_4	7	-6	8

استعمل أسلوب الهيمنة لحل اللعبة؟

الحل:

		المؤسسة B			Min
		T_1	T_2	T_3	
المؤسسة A	S_1	1	2	6	1
	S_2	3	5	7	3
	S_3	-3	4	9	-3
	S_4	7	-6	8	-6

	9	5	7	Max

نلاحظ أنه بالنسبة للاعب B لا يلعب الاستراتيجية الثالثة لأنها مهيمنة من الاستراتيجية الأولى والثانية:

	المؤسسة B			
		T_1	T_2	T_3
المؤسسة A	S_1	1	2	6
	S_2	3	5	7
	S_3	-3	4	9
	S_4	7	-6	8

الآن بعد شطب العمود الثالث بقيت لدينا مصفوفة قابلة للحل بيانيا نقوم بحلها بنفس الخطوات السابقة.

ج. الحل بطريقة السمبلكس: وعند تعذر الحل بالطريقة البيانية تأتي طريقة السمبلكس القوية ويمكن تلخيصها:

A \ B	y_1	y_2	...	y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}

ويصبح البرنامج الخطي باختصار:

$$MinZ_0 = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$$

$$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq 1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq 1$$

... ...

$$a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq 1$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \geq 0$$

حيث: $V^* = \frac{1}{y_0} - k$

ثم نقوم بحل النموذج المقابل لكونه الأسهل في الحل:

$$Max y_0 = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq 1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq 1$$

... ...

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq 1$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

حيث: $V^* = \frac{1}{y_0} - k$

K: هو ثابت نضيفه للمصفوفة في حالة وجود أرقام سالبة حتى تكون جميع الارقام موجبة أو معدومة.

في حالة اللعبة mxn حيث m#2 و n#2 يمكن حل اللعبة بيانيا.

مثال07:

لتكن مصفوفة اللعب أدناه أوجد حل اللعبة بطريقة السمبلكس؟

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-1	1	-1
A_2	0	1	0	0
A_3	0	0	1	1

نضيف ثابت k=2 الى المصفوفة:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	1	3	1
A_2	2	3	2	2
A_3	2	2	3	3

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+ y_4$

$3y_1+y_2+3y_3+ y_4\leq 1,$

$2y_1+3y_2+2y_3+2 y_4\leq 1,$

$2 y_1+2y_2+3y_3+3 y_4\leq 1,$

$y_1,y_2,y_3, y_4\geq 0$

تحضير البرنامج:

Max $y_0=y_1+y_2+y_3+0 s_1+0 s_2+0 s_3,$

$3y_1+y_2+3y_3+ y_4+s_1=1,$

$2y_1+3y_2+2y_3+2 y_4+s_2=1,$

$2 y_1+2y_2+3y_3+3 y_4+s_3=1,$

$y_1,y_2,y_3, y_4\geq 0$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	s_1	s_2	s_3	RHS
	-1	-1	-1	-1	0	0	0	
s_1	3	1	3	1	1	0	0	1
s_2	2	3	2	2	0	1	0	1
s_3	2	2	3	3	0	0	1	1
y_0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

s_1	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
s_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_0	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
s_1	$\frac{11}{5}$	0	2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
y_2	$\frac{2}{5}$	1	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_4	$\frac{2}{5}$	0	1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_0	0	0	$\frac{2}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$
y_1	1	0	$\frac{10}{11}$	0	$\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$
y_2	0	1	$-\frac{4}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$
y_4	0	0	$\frac{7}{11}$	1	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{11}$

$$v = \frac{1}{y_0} - K = \frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5}$$

$$y_1 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{3}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{5}$$

$$y_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{5}$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{5}$$

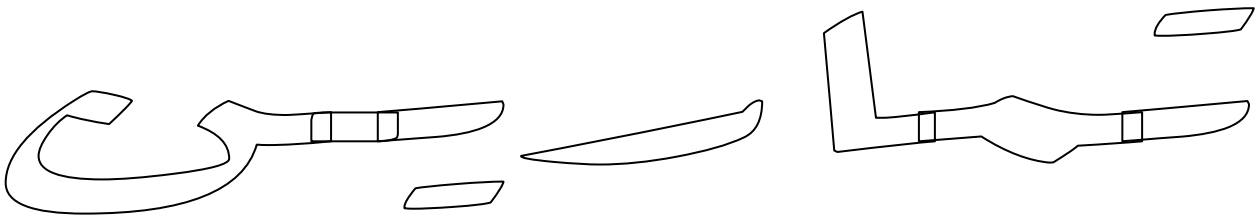
أما اللاعب الثاني:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{5}$$

$$X_3 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{2}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5}$$

$$X_4 = \frac{1}{y_0} \cdot \frac{2}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5}$$



تمارين:

التمرين الأول:

يعطى لك البرنامج الخطي الآتي:

$$MaxZ_0 = 14X_1 + 17X_2 + 12X_3,$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \leq 40, \\ 10X_1 + 12X_2 + 7X_3 \leq 420, \\ 6X_1 + 9X_2 + 5X_3 \leq 280, \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب:

1. هل بإمكاننا حل البرنامج بيانيا؟
2. أوجد حل البرنامج الثنائي؟ واستنتج حلول البرنامج الأصلي؟

التمرين الثاني:

مصنع ينتج 100 كيلوغرام لوصفة قاعدية لصنع المثلجات هاته الوصفة يجب أن تحتوي على 21,5 كيلوغرام من المواد الدسمة و 21 كيلوغرام من السكر و 1,2 كيلوغرام من البيض و 56,3 كيلوغرام من الماء، هذه المقادير موضحة في الجدول أدناه كما يوضح أيضا النسبة المؤوية بالوزن لكل مكون من المقادير والتكلفة للكيلوغرام من المقادير.

المقادير / المكونات	قشدة	صفار البيض الطازج	حليب كامل مسحوق	صفار البيض مجمد ومحلى	شراب قصب السكر	الماء
مواد دسمة	40	50	12	30		
سكر				14	70	
البيض		40		40		
ماء	60	10	88	16	30	100
التكلفة بالوحدة النقدية	3	4	1	2	0,8	0

المطلوب:

1. يريد صاحب المصنع الوصول الى المزيج الاقل تكلفة أكتب البرنامج الخطي المتعلق بالمسألة؟
2. حتى الآن صاحب المصنع يعتمد على المزيج التالي:
   - ✓ 50 كيلوغرام من القشدة ;
   - ✓ 3 كيلوغرام من صفار البيض الطازج ;
   - ✓ 30 كيلوغرام من شراب قصب السكر ;
   - ✓ 17 كيلوغرام من الماء.

ما هي تكلفة هذا المزيج؟هل نستطيع تكوين جدول السمبلكس المتعلق بالمزيج؟لماذا؟اذا كانت الاجابة نعم قم بتكوينه؟

3. ما هو المزيج الذي يقلل التكاليف؟
4. نظرا لتقلبات الاقتصاد تغيرت أسعار القشدة وصفار البيض الطازج الى 7,4 على الترتيب فهل المزيج المتحصل عليه من المطلوب 3 يبقى الاقل تكلفة؟

التمرين الثالث:

يعطى لك جدول الحل النهائي لمسألة ما:

$$MinZ_0 = 3X_1 + 2X_2,$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$X_1 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z_0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	12
S_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	4
S_3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	5
X_2	0	1	0	0	0	1	0

المطلوب:

1. اذا حصل تغير في الطرف الأيمن من 6 الى 7 وحدات فما هو التغير الحاصل على الحل الأمثل؟
2. ما التغير الحاصل على الحل الامثل اذا تغيرت عناصر الطرف الأيمن من 8,6 الى 4,7 ؟
3. لنفترض إضافة قيد جديد $X_1 \leq 4$ فما الجديد؟
4. أما إذا أضفنا القيد $X_1 \leq 3$ فما الجديد؟
5. لنفترض أن عائد الدالة الأول قد تغير من 3 الى 5 فما الأثر الناتج؟
6. مع افتراض أن عناصر دالة الهدف تغيرت الى 1,4 فما الجديد؟
7. اذا أضفنا متغير جديد بمعاملات (0,-1,3/4,3/4) فهل يتأثر الحل الأمثل؟

التمرين الرابع:

اليك البرنامج الخطي التالي:

$$MaxZ_0 = X_1 + 3X_2,$$

$$\begin{aligned} 2X_1 + 12X_2 &\leq 24, \\ 3X_1 + 6X_2 &\leq 24, \\ 2X_1 + 2X_2 &\leq 14, \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب:

1. أوجد الحل البياني للبرنامج؟
2. أوجد حل البرنامج الثنائي؟استنتج حلول البرنامج الأولي؟

التمرين الخامس:

يقوم مصنع بنقل منتجاته الى زبائنه وفق الجدول التالي:

	C_1	C_2	C_3	C_4	عرض المصنع
U_1	8	11	2	8	9
U_2	3	7	1	4	10
U_3	2	0	10	5	7
طلب الزبائن	6	9	8	3	26

المطلوب:

1. أوجد الحل الامثل لنقل البضاعة الى الزبائن بأقل التكاليف؟

التمرين السادس:

الجدول أدناه يبين كميات الطلب والعرض من المصادر والاتجاهات وتكاليف نقل الوحدة الواحدة من المصدر الى الاتجاه:

	X	Y	Z	العرض
A	8	12	3	20
B	10	6	11	15
C	1	4	8	10
D	7	11	5	25
الطلب	30	25	15	70

المطلوب:

1. أرسم شبكة النقل للمسألة؟
2. أوجد الحل الامثل للمسألة؟

التمرين السابع:

ليكن الجدول أدناه:

D_J / S_i	D_1	D_2	a_i
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	a_2
b_j	b_1	b_2	$\sum a_i$ / $\sum b_i$

المطلوب:

ما هو مفهوم الرموز: $\sum a_i$, C_{11}, X_{12}, a_i, b_j, S_i, D_j , $\sum b_i$ ؟

التمرين الثامن:

اذا علمنا أن أربع فنيين يجب تخصيصهم الى أربع آلات وأن التكلفة المصاحبة للتخصيص موضحة في المصفوفة الآتية:

	الآلات			
	1	2	3	4
	5	5	-	2
الفنيين	7	4	2	3
	9	3	5	-
	7	2	6	7

المطلوب:

أوجد الحل الامثل لمسألة التخصيص هاته؟

التمرين التاسع:

يرغب استاذ في تخصيص مسالة لكل طالب من الطلبة في الجدول أدناه:

	برمجة خطية	قرارات	نقل
أحمد	15	20	10
آلاء	20	8	11
هدى	12	17	23
مُحَمَّد	16	13	9

المطلوب:

أوجد التخصيص الأمثل للمسائل على الطلبة؟

التمرين العاشر:

يود مسير تخصيص أعمال على مبرمجين والتكاليف كانت كالتالي:

	العمل				
	1	2	3	4	5
	20	12	17	8	9
	13	15	14	7	20
المبرمجين	30	18	9	14	8
	25	11	16	3	22
	4	24	22	28	7

المطلوب:

أوجد التخصيص الامثل للأعمال على المبرمجين؟

التمرين الحادي عشر:

لتكن مصفوفة اللعبة التالية:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	0	-6
A_2	-1	-1	2
A_3	-2	0	0

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل للعبة؟

التمرين الثاني عشر:

اليك مصفوفة الدفع التالية:

	B		
A	2	3	0
	1	2	3
	4	1	2

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بيانيا؟

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

1. أبو القاسم مسعود الشيخ،بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر،الطبعة الثانية، القاهرة، مصر،2009.
2. أكرم مُحَمَّد عرفان المهدي،الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية،دار الصفاء للنشر والتوزيع،الطبعة الأولى،عمان ،الأردن،2010.
3. حسن علي مشرقي،زياد عبد الكريم القاضي،بحوث العمليات،الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع،عمان ،الأردن،1999.
4. دلال صادق الجواد،حميد ناصر الفتال،بحوث العمليات،دار اليازوري للنشر، عمان، الأردن،2008.
5. ريتشارد برونسون،بحوث العمليات،سلسلة ملخصات شوم،الدار الدولية للنشر والتوزيع،القاهرة،مصر،2004.
6. سهيلة عبد الله سعيد،الجديد في الاساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى،دار الحامد للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،2007.
7. شفيق العتوم، بحوث العمليات، دار المناهج للنشر والتوزيع،عمان، الأردن، 2016.
8. صالح مهدي محسن العامري،عواطف ابراهيم الحداد،تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة الأولى، إثراء للنشر والتوزيع،عمان،الأردن،2009.
9. لحسن عبد الله باشيوة،بحوث العمليات،اليازوري للنشر والتوزيع،عمان، الأردن،2011.
10. مُحَمَّد راتول، بحوث العمليات،الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2006.
11. محمود العبيدي،مؤيد عبد الحسين الفضل،بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال،الطبعة الأولى،الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن،2004.
12. محمود علي متولي عجور،بحوث العمليات والاحصاء،دار الفكر الجامعي،الاسكندرية،مصر،2007.
13. Anne-Marie BACHAS, Recherche Opérationnelle et Aide a la Décision, CNAM Aix-en-Provence, France, 2002.
14. Frederick S.Hiller, Gerald J.Lieberman, Introduction To Operations Research, Mcgraw-Hill, New York, United States, 2005.
15. Hamdy.A. Taha, Operations Research : An introduction, PEARSON EDITION, New Jersey, USA, 2007
16. Michel Nakhla, Jean-Claude Moisdor, Recherche Opérationnelle, Collection les cours, Paris, France, 2010.
17. Rama Murthy, Operations Research, New AGE INTERNATIONAL PUBLISHERS, Second Edition, New Delhi, india, 2007
18. Roseaux, Exercices et Problèmes Résolus de Recherche Opérationnelle, DUNOD, Paris, France, 2000.