مطبوعة في الاحصاء الاستدلالي

كلية العلوم الاقتصادية ، العلوم التجارية و علوم التسيير

محاضرات في الاحصاء 3

موجه لطلبة ليسانس السنة الثانية علوم اقتصادية و علوم مالية و محاسبة

إعداد: أيت بشير ليندة

الطبعة الأولى

2022

فهرس المحتويات

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

I بطاقة المعلومات العامة

بطاقة معلومات حول المقياس	
الجامعة :المركز الجامعي أفلو بولاية الأغواط معهد العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية و علوم التسيير قسم العلوم الاقتصادية، المالية والمحاسبة	
عنوان المقياس: الإحصاء الاستدلالي	**لغة التدريس**: اللغة العربية
الاختصار : إحصاء 3	**يقدم الدرس** : في شكل محاضرة و أعمال موجهة
الفئة المستهدفة :موجه لطلبة ليسانس نظام ل م د السنة الثانية قسم علوم اقتصادية، علوم المالية والمحاسبة	
السداسي: الثالث، **الوحدة**: المنهجية	**الرصيد**:3 **المعامل**:2
الحجم الساعي: 45ساعة(24سا محاضرات و21سا TD)	**الحجم الساعي في الأسبوع** :3ساعات
مكان التدريس: داخل المركز الجامعي المحاضرات في المدرج "أ" و الأعمال الموجهة في قاعات التدريس. **توقيت التدريس**: الأحد من 9:00 إلى 12:30	
طريقة التقييم :50% تقييم مستمر+50% امتحان نهائي	

بطاقة معلومات الخاصة بالأستاذ	
الأستاذة: أيت بشير ليندة	**مكان التواجد**: قاعة الأساتذة يوم الثلاثاء من الساعة 11:00 حتى 12:30
الايميل:l.ait_bachir@cu-aflou.dz	
الرد على الأسئلة :كل سؤال يطرح وله علاقة بالمحاضرة التي ألقيت التزم بالرد عليه مع كل التوضيحات والاستفسارات. **الرد على البريد الألكتروني**:ألتزم بالرد على كل الأسئلة المطروحة والمرسلة عبر البريد الإلكتروني خلال48 ساعة الموالية لاستقبال الرسالة الإلكترونية	

II الأهداف العامة للمقياس

يعتبر علم الإحصاء من أهم الوسائل العلمية المستخدمة في المجالات المختلفة للبحث العلمي بوجه عام ، وفي ميدان العلوم الاقتصادية بوجه خاص، فبدون الإحصاء لا يستطع الباحث الإجابة عن تساؤلات بحثه أو فحص فروضه ، ومن ثم لا يستطع استنتاج معلومات معينة عن مجتمع ما من خلال دراسته عينة معينة ممثلة لهذا المجتمع . ومع تطور العلوم اتذ علم الإحصاء معنى أخر فأصبح علم اتخاذ القرارات ليمهد الطريق لتطبيق أسلوب البحث العلمي في تحليل الظواهر وساعد في ذلك ظهور البرامج الإحصائية حيث وفرت الوقت والجهد والدقة في تحليل البيانات.

و الإحصاء الاستدلالي هو ذلك الإحصاء الذي يهتم بالطرق والأساليب التي تكشف وتستدل على وجود النتائج في المجتمع من خلال وجودها في العينة المأخوذة منها ويتناول ما يعرف باختبارات الفروض ومستويات الأدلة ونظرية التقدير ومنه اتخاذ القرار المناسب .

الكلمات المفتاحية:الإحصاء، الاستدلال، المعاينة، التقدير، اختبار الفرضيات.

الهدف الرئيسي لهذا المقياس هو:

1. تزويد الطالب بمقدمة في الإحصاء الاستدلالي؛
2. تعريف الطلاب بالمفاهيم الإحصائية المتعلقة بالتعميم من بيانات العينة إلى بيانات المجتمع؛
3. تدريب الطلاب على تحويل أسئلة وفروض البحث إلى فروض إحصائية ؛
4. تطبيق أساليب الإحصاء الاستدلالي في وصف وتحليل البيانات والتحقق من صحة الفروض الإحصائية؛
5. اختيار الأدوات و الأساليب المناسبة للإحصاء الاستدلالي في حل المشكلات الاقتصادية.

بعد الانتهاء من دراسة هذا المقياس يتوقع من الطلبة أن يحققوا جملة من المهارات هي:

مهارات علمية ومعرفية

- أن يستوعب الطالب المفاهيم المتعلقة بتعميم نتائج العينة على المجتمع؛
- أن يكون الطالب قادراً على استيعاب خصائص العينة والمجتمع الأصلي المشتقة منه؛
- التمكن من صياغة الفروض و تحويلها من فروض بحثية إلى فروض إحصائية بطريقة مناسبة تساعد على اختبارها.
- القدرة على وصف شروط استخدام أساليب التحليل الإحصائي المختلفة.

مهارات إدراكية

- يشرح أهمية الإحصاء الاستدلالي في جمع المعلومات من مصادر متنوعة.
- القدرة على تحديد مستوى الدلالة المناسب والكشف عنها باستخدام الجداول الإحصائية.
- يحلل البيانات الإحصائية بهدف قياس الخطر و الفرض الأمثل.
- التمكن من إدراك الفروق بين استخدامات الاختبارات الإحصائية المختلفة.
- قدرة على اختيار الاختبار الإحصائي المناسب للتحقق من صحة الفروض وتفسير نتائج الاختبار وفهم المعنى الاقتصادي للنتائج.
- ابتكار حلول جديدة لمشكلات اقتصادية

مهارات التحليل والاتصال

- إكساب الطالب القدرة على التحليل الإحصائي و تسهيل وتطويع علم الإحصاء للوصول إلى النتائج والقرارات الأكثر دقة.
- إكساب القدرة على التواصل مع الآخرين و توضيح الفكرة بمنطق سليم

مهارات شخصية وتحمل المسؤولية

- حضور الحصص في الزمن المحدد.
- أداء الواجبات المطلوبة منها في الموعد المحدد
- أداء الاختبارات في الموعد المحدد،قواعد الحوار والمناقشة.

III المكتسبات القبلية

لمتابعة مقرر الإحصاء الاستدلالي يجب على الطالب أن يكون ملم بالعناصر التالية:

1. وصف البيانات الإحصائية من خلال مؤشرات النزعة المركزية (المتوسط الحسابي ، الوسيط، المنوال) ، مؤشرات التشتت (المدى، الانحراف المعياري و التباين) و مؤشرات الشكل(ألتفلطح، الالتواء) .
2. حساب الاحتمالات؛
3. التوزيع الطبيعي المعياري، توزيع ستودنت، و نظرية النهاية المركزية؛

IV اختبار المكتسبات القبلية

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحكمك في المكتسبات القبلية

تمرين 1:إحصاءات المجتمع

[213 ص 1 حل رقم]

البيانات التالية تمثل تكرارات أعمار 100 عامل في إحدى المصانع على التوالي:
09،14،22،30،15،10
مع العلم أن طول الفئة هو 10 وحدات و الحد الأدنى للفئة الأولى هو 19،5
فأوجد قيمة المتوسط الحسابي، التباين ، الانحراف المعياري

☐

☐ المتوسط الحسابي هو 48،7

☐ المتوسط الحسابي هو 49،2

☐ التباين هو 190،3

☐ التباين هو 180،68

☐ التباين هو 179،83

☐ الانحراف المعياري هو 15،2

☐ الانحراف المعياري هو 14،6

☐ الانحراف المعياري هو 13،44

تمرين 2

[214 ص 2 حل رقم]

في أحد صناديق يوجد 5 كريات $A\ B\ C\ D\ E\ F$ نريد سحب عينة مكونة من كريتين فما هي عدد العينات الممكنة في الحالة السحب بدون إرجاع.

تمرين 3

[214 ص 3 حل رقم]

إذا كان متوسط طول 500 طالب في أحد المدارس الثانوية هو 151سم بانحراف معياري(قياسي) قدره 15 سم ، فإذا فرضنا أن الأطوال الطلبة تتوزع توزيعا طبيعيا أوجد القيمة المتوقعة للطلبة الذين :
يتراوح طولهم ما بين 120 و 150 سم

○ 0,5872

○ 0,6078

○ 0,8790

V

طريقة التقييم

إن التقييم النهائي يتم عبر طريقتين:

امتحان نهائي:ويكون هذا الامتحان شامل لجميع ما تم دراسته في المحاضرة خلال - السداسي- ويجسد هذا الامتحان نسبة 50% من العلامة النهائية.

التقييم المستمر والمنتظم: يجسد هذا التقييم نسبة 50% المتبقية ، ويسمح هذا التقييم باكتساب مجموعة من النقاط خلال طول مدة السداسي ويكون هذا التقييم المستمر بعدة طرق وأشكال، و حسب اللجنة البيداغوجية للقسم العلوم الاقتصادية التابع للمركز الجامعي أفلو فقد تم وضع المعايير التالية :

*معدل التقييم المستمر هو مجموع العلامات التالية:

- علامة خاصة بالمشاريع التي يقوم بها الطالب سواء كانت مشاريع فردية أو جماعية؛
- علامة على امتحانين كتابيين(الامتحان التكويني)؛
- علامة على حسن السلوك والحضور و المشاركة؛
- علامة على تحضير سلاسل تمارين الأعمال الموجهة؛

ملاحظة: كل 3 غيابات غير مبرر في حصص الاعمال الموجهة أو 5 غيابات مبررة تعرض صاحبه للإقصاء .

العلامة النهائية=علامة الامتحان النهائي+علامة الأعمال الموجهة/2

العلامة النهائية التي تحقق النجاح في هذا المقياس يجب أن تكون تساوي أوتفوق 10.

VI

الوحدات التدريسية الإحصاء الاستدلالي

يتناول مقياس الإحصاء الاستدلالي المفاهيم الأساسية وذلك لتمكين الطالب من التعرف بمجالات تطبيقه ووظائفه، وأنواع البيانات وطرق جمعها، وتدريبه على تطبيق الأساليب الإحصائية في مجال تخصصه، وتمكينه من إجراء التحليلات الإحصائية، وتفسير النتائج.

ويهتم هذا المقرر أيضا بعرض العديد من الأمثلة والتطبيقات الإحصائية في مجال التخصص لكي تكسب الطالب خبرة

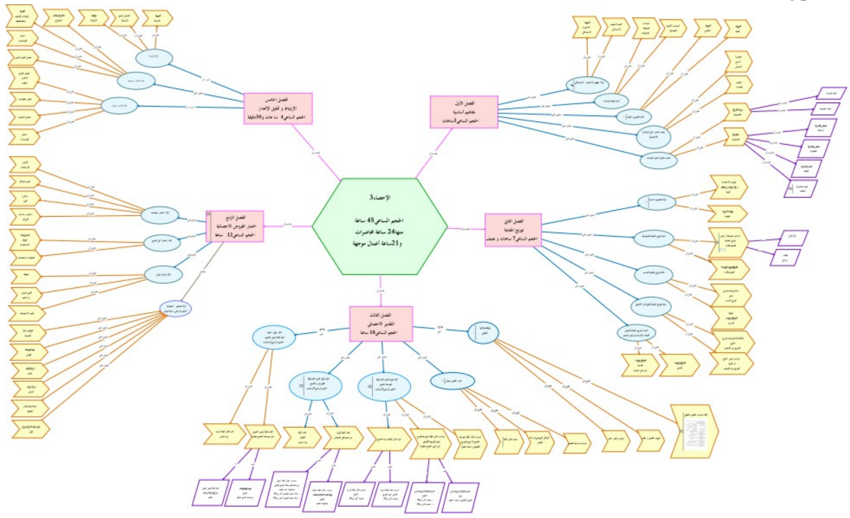
في التعامل مع البيانات وتحليلها.

لذا ننصح الطالب بالمواظبة على حضور المحاضرات والأعمال الموجهة بشكل منتظم، والإطلاع المسبق على فصول المقرر،

والاشتراك في المناقشة، وحل التمارين

وحدات ألإحصاء الاستدلالي

1. الفصل الأول:مفاهيم أساسية(مفاهيم أساسية: مفهوم الإحصاء الاستدلالي، طبيعة البيانات، المجتمع و العينة، أساليب جمع البيانات الإحصائية، طق اختيار العينات)؛
2. الفصل الثاني:توزيع المعاينات(مفهوم توزيع المعاينة ،توزيع المعاينة لمتوسط ،توزيع المعاينة للنسب،توزيع المعاينة للفروق والمجاميع، توزيع المعاينة للتباين العينة،توزيع المعاينة لنسبة بين تباين عينتين)؛
3. الفصل الثالث:التقدير الإحصائي(مفاهيم أساسية ، طرق التقدير النقطي، معايير اختيار التقدير النقطي الجيد، التقدير بمجال،)
4. الفصل الرابع:اختبار الفروض الإحصائية(أساسيات حول اختبار الفرضيات، اختبارات المطابقة لمعلمة مجتمع واحد، اختبارات تباين المجتمع، اختبارات جودة التوافق، اختبارات الفروق بين معلمتي مجتمعين)



الخريطة الذهنية لمقياس الإحصاء الاستدلالي

VII الاختبار القبلي

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحكمك في الأهداف الخاصة للمقياس

قد تكون -عزيزي الطالب- لديك مكتسبات علمية و معرفية تجعلك متمكنا من بعض الأهداف الخاصة لهذا المقياس و التي يمكن بذلك تجاوزها و المرور إلى بقية الأهداف لذلك ننصحك بهذا الاختبار القبلي

تمرين 1

[215 ص 4 حل رقم]

ما هي أهمية الإحصاء الاستدلالي ؟

- ○ عرض وتبويب البيانات
- ○ استخدام النتائج في التحليل و التنبؤ

تمرين 2

[215 ص 5 حل رقم]

صنف المتغيرات التالية إلى متغيرات وصفية أو كمية مستمرة أو كمية منقطعة

1- درجة الحرارة في مدن معينة
2- الزمرة الدموية لشخص ما
3- قيمة الفاتورة في كل ثلاثي بالدينار الجزائري
4- أنواع الهواتف النقالة في مجموعة من المنازل
5- عدد التلاميذ في كل قسم في مدرسة ما

7- الجنسية
8- عدد الهواتف الثابتة في مجموعة من المنازل
9- قياس ضغط الدم
10- نوعية السيارة التي يمتلكها شخص ما
11- ذكاء شخص
12- بيانات تخص أراء عينة من الأشخاص عم منتوج ما
13- نتائج رمي زهرة النرد
14- أسعار الفاكهة في السوق
15- المسافة المقطوعة

متغيرة كمية مستمرة | متغيرة وصفية | المتغيرة الكمية المنقطعة

تمرين 3

[215 ص 6 حل رقم]

المجتمع الإحصائي هو مجموعة من ______ ذات خصائص مشتركة، أما العينة فهي جزء من ______ يتم اختيارها بطرق مختلفة بغرض دراسة هذا المجتمع.

تمرين 4

[215 ص 7 حل رقم]

رتب خطوات اختيار العينة

1. مراعاة عدم التحيز والخطأ
2. تحديد العدد المناسب لأفراد العينة
3. تحديد أفراد المجتمع الأصلي
4. تحديد مجتمع الدراسة

جواب : ___ ___ ___ ___

تمرين 5

[215 ص 8 حل رقم]

تصنيف العينات

1- العينة الغرضية أو الحكمية أو الهادفة
2- العينة الملائمة المناسبة
3- العينة الحصصية
4- العينة العشوائية العنقودية
5- العينة العشوائية البسيطة
6- عينة كرة الثلج
7- العينة العشوائية الطبقية
8- العينة المعيارية
9- العينة العشوائية المنتظمة

أنواع العينات غير العشوائية | أنواع العينات العشوائية الاحتمالية

VIII

الفصل الأول: مفاهيم أساسية

الأهداف الخاصة بالفصل الأول

نهدف من خلال هذا الفصل إلى تحقيق جملة من الأهداف أهمها :أن يتعرف الطالب على مفهوم الإحصاء الاستدلالي وأهميته في البحوث الاقتصادية؛

1. أن يتعرف الطالب على مفهوم الإحصاء الاستدلالي وأهميته في البحوث الاقتصادية؛
2. أن يفرق بين أنواع البيانات الإحصائية؛
3. أن يتمكن من اختيار الأسلوب المناسب لجمع البيانات الإحصائية حسب خصائص المجتمع؛
4. أن يختار طريقة المعاينة بحيث تكون ممثلة للمجتمع الأصلي.

مقدمة

يهتم علم الإحصاء بجمع وتحليل وعمل استدلالات حول الظاهرة المدروسة. إن هذا التعريف يحمل في دلالته الكثير من الجوانب. فعملية جمع بيانات عن ظاهرة ما لا تعد مسألة بسيطة. بل تستلزم الكثير من الفرضيات و الإجراءات لتنفيذها. أولها تحديد العينة المراد درستها، من حيث حجمها وتركيبتها. أما تحليل البيانات فيعتبر أكثر من مجرد معرفة معاني المصطلحات الإحصائية. ويتضمن مزيجا من سلامة التفكير والحدس والخبرة التقنية والفضول. خصوصا أن تحليل البيانات لا يعتبر عملية رتيبة، فلكل بيانات نستخدمها

آ. مفهوم الإحصاء الاستدلالي

الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وعرضها وتبويبها وتحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير أو التحقق و يقسم هذا العلم إلى قسمين رئيسيين الإحصاء الوصفي الذي تناوله الطالب فيما سبق و الذي يهتم بجمع البيانات وتبويبها وعرضها تم إجراء الحسابات اللازمة و الإحصاء الاستدلالي و الذي هو موضوع بحثنا.

1. تعريف الإحصاء الاستدلالي

تعريف

هو إحصاء الذي يهتم بتحليل البيانات واستخدام النتائج ثم تفسيرها واستعمالها لاتخاذ القرارات وعمل استنتاجات إحصائية عن المجتمع الإحصائي الأصلي من العينات المسحوبة في ظل عدم التأكد ،أي اتخاذ أفضل قرار ممكن عندما تكون المعلومات المتوفرة غير كافية ويطلق عليه علم القرارات و يبد أحين ينتهي الإحصاء الوصفي.

2. أهمية الإحصاء الاستدلالي

تكمن أهمية الإحصاء في حقيقة بأنه وسيلة لا غاية إذ تستخدم نتائج البحث في:

1. التنبؤ أو استخدام النتائج في تقدير رقمي لبيان غير معروف بالتحديد وقد يكون هذا لفترات زمنية مستقبلية أو ماضية؛
2. اتخاذ قرار محدد اتجاه المشكلة و اتخاذ القرار ماهو إلا عملية اختيار البديل المناسب من عدة بدائل؛
3. التحقق:التثبت من صحة أو عدم صحة فرضية ما من خلال جمع حقائق جديدة ليتحقق من مدى صحة تنبؤه السابق؛
4. الرقابة:على مدى الجودة في الصناعة بالإضافة إلى الرقابة الكمية فيها.

ب. طبيعة البيانات

إن الصفة التي تتغير من شخص إلى أخر ،أو من مفردة إلى أخرى تسمى بالمتغيرة و يرمز لها بـ X_i ويرمز لكل مفردة من مفردا المتغير بالرمز (X_i) حيث أن $(i=1,2,3,\dots\dots.n)$.

فعلى سبيل المثال:عند دراسة أوزان مجموعة من الطلاب جامعة الأغواط فإننا نرمز لصفة الوزن (X)، ويرمز لوزن أي طالب بالرمز (X_i) .

1. البيانات الوصفية(النوعية)

وهي المشاهدات أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة كالعد و التقييس، مثل صفة لون العينين(أسود ،بني،أخضر...الخ)، صفة الجنس(ذكر،انثي)،صفة الحالة الإجماعية(أعزب،متزوج،أرمل،مطلق) .

2. البيانات الكمية(العددية)

وهي المشاهدات أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة،مثال ذلك عدد الطلبة في جامعة معينة،الطول،كمية المحصول،أوزان الطلبة،أعمارهم....الخ.وتكون البيانات الكمية على نوعين،هما:

- البيانات الخاصة بالمتغيرات المنفصلة:وهي المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما متميزة عن بعضها،مثلا عدد أفراد الأسرة،أو عدد الهواتف النقالة لدى الشخص. و تنقسم إلى متغيرات اسمية و تضم مثلا الجنس و الحالة العائلية و متغيرات ترتيبية تتكون من فئات مثل تقدير الطالب.
- البيانات الخاصة بالمتغيرات المتصلة:وهي المشاهدات أو الصفات التي تأخذ مدى معين أومجال معين من القيم مثال ذلك أوزان طلبة المركز الجامعي أفلو،أو أطوال عينة من الطلبة ،إذ تتراوح بين 150سم و 180سم.

تنبيه

هناك نوع أخر من البيانات تجمع بين الكمية و الوصفية تعرف بالبيانات المختلطة.

ب. المجتمع و العينة

سنتطرق في هذا المبحث إلى تعريف المجتمع و العينة

1. تعريف المجتمع

تعريف

مجموعة من العناصر أو المفردات التي تخص ظاهرة معينة"و يطلق عليه المجتمع الإحصائي والهدف الرئيسي من تحديد المجتمع الإحصائي هو تعيين الحدود الصريحة لعملية جمع البيانات وكذلك لعملية الاستقراء أو الاستنتاج التي يمكن الحصول عليها من خلال إجراء الدراسة من جهة ثانية.

ملاحظة : المجتمع المحدود و غير المحدود

مجتمع محدود: و هو المجتمع الذي نستطيع حصر كل مفرداته مثل مجتمع الوسطاء في الأسواق التجارية و الأسواق المالية.

مجتمع غير محدود: وهو المجتمع الذي لا نستطيع حصر كل مفرداته مثل مجتمع الأسماك في البحر أو مجتمع الطيور المهاجرة.

2. تعريف العينة

تعريف : العينة

ويطلق على مفردا العينة التي تم اختيارها من المجتمع عادة بحجم العينة و يرمز له بالرمز(n) اذ أن ($n<N$).

العينة النفادية والعينة غير النفادية Echantillon exhaustif et non exhaustif

عندما يكون السحب بالإرجاع حيث يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، نسمي هذه المعاينة غير نفادية لأن تكرار العملية لا يؤدي إلى تقليص عدد المفردات في المجتمع، والعكس نسمي المعاينة بدون إرجاع معاينة نفادية. هناك فرضيتان تتكرران في عدد من العلاقات الرياضية التي سنراها لاحقا، هما

أساسي

ولكي تكون العينة مقبولة من الناحية الإحصائية ينبغي أن تكون عينة ممثلة للمجتمع(*representative sample*)،أي أنها تحتوي على جميع الخصائص بنفس نسب تواجدها في المجتمع الإحصائي الذي اختيرت منه،وأن تكون هذه العينة ذات دقة يمكن قياسها.

3. حجم العينة المثلى

• أورد الإحصائيون مجموعة من القواعد التي يمكن الاسترشاد بها لتحديد حجم العينة المطلوب على النحو التالي:

1- من ثلاثين إلى خمسمائة مفردة يعتبر ملائمًا لمعظم الأبحاث والدراسات.

2- يجب ألا يقل عدد المفردات لكل طبقة عن ثلاثين مفردة في العينات الطبقية.

3- يفضل ألا تقل مفردات العينة عن عشرة أضعاف عدد متغيرات الدراسة.

4- قد يكون حجم عينة من عشر إلى عشرين مفردة مقبولاً إذا كان البحث تجريبيًّا وحجم الضبط والرقابة عالٍ ومبرر من الباحث.

كما صاغ إحصائيون آخرون تحديد الحجم الأمثل لاختيار العينة بصورة أخرى على النحو التالي:

1- في الدراسات الوصفية ينصح باستخدام ما نسبته 20% من أفراد مجتمع صغير نسبيًّا (بضع مئات)، و10% لمجتمع كبير (بضعة آلاف)، و5% لمجتمع كبير جدًّا (عشرات الآلف).

2- إذا كانت الدراسة تعتمد في تحليلها على العلاقات الارتباطية، يجب ألا يقل أفراد العينة عن عشرين مفردة، ويفضل أن يكون من خمسين إلى مائة مفردة.

3- يجب ألا يقل عدد عناصر المجموعة الواحدة في حالة الدراسات التجريبية أو شبه التجريبية ذات المجموعتين أو أكثر عن خمسة عشر عنصرًا.

واهتم باحثون آخرون بتحديد حجم العينة في ضوء تجانس أو عدم تجانس المجتمع، وذلك على النحو التالي:

1- إذا كان مجتمع الدراسة متجانسًا تقريبًا، وأراد الباحث درجة عالية من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية بسيطة) بحجم 23%..

أما إذا أراد الباحث تحقيق درجة مناسبة من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية بسيطة) بحجم 10%..

2- إذا كان مجتمع الدراسة غير متجانس وبه مجموعات متساوية الحجم تقريبًا، وأراد الباحث درجة عالية من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية بسيطة) بحجم 23%.، و(عشوائية طبقية) بحجم 10%.

أما إذا أراد الباحث تحقيق درجة مناسبة من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية بسيطة) بحجم 13%..

3- إذا كان مجتمع الدراسة غير متجانس، وكانت المجموعات فيه غير متساوية الحجم تقريبًا، وأراد الباحث تحقيق درجة عالية من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية طبقية بحجم 10%) و(عشوائية بسيطة بحجم 33%).

أما إذا أراد الباحث تحقيق درجة مناسبة من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية بسيطة) بحجم 23%..

4- إذا كان مجتمع الدراسة غير متجانس، وكانت المجموعات فيه صغيرة ومتطرفة، وأراد الباحث تحقيق درجة عالية من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية طبقية بحجم 13%).

أما إذا أراد الباحث تحقيق درجة مناسبة من الدقة، فإن العينة تكون (عشوائية طبقية) بحجم 10%.

يعتبر جمع البيانات هي نقطة البداية لتصنيفها وتحليلها وتفسير النتائج بعد أن يكون الباحث قد حدد موضوع لبحث بشكل دقيق وواضح وتتعدد أساليب جمع البيانات من مصادر مباشرة مـن خلال الاسـتبيان، المقابلـة والملاحظة وأخرى غير مباشرة من خلال جهات مختصة بجمع المعلومات.ولجمع البيانات عن ظـاهرة معينـة هناك أكثر من طريقة و يمكن توضحيهما كما يلي:

1. أسلوب المسح الشامل

وفيها تجمع البيانات من جميع عناصر المجتمع الإحصائي وتمتاز نتائج هذه الطريقة بالدقـة العاليـة والوضـوح والتفصيل والمصداقية لكن من سلبياتها الحاجة إلي الوقت و الجهد والى عـدد كـبير مـن البـاحثين و ارتفـاع التكاليف.

نصيحة

هناك عدة حالات يتعذر فيها المسح الشـامل و عندها يلجأ الباحث إلي دراسـة العينة ومن أمثلة هذه الحالات نجد:

- فسـاد عناصر المجتمع نتيجة أخذ المشـاهدات من تلك العناصر ،فمثلا اذا أردنا معرفة مدى صلاحية البيض الذي تنتجه مزرعة ما للأكل ، فإنه يمكن أن نقوم بتكسير كل إنتاج المزرعة.
- عدم إمكانية الوصول إلى جميع عناصر المجتمع فمثلا إذا أردنا أن نـدرس كميـات الأمطـار و تأثيرهـا على إنتاج القمح في الجزائر مند سنة 1925 حتى الآن فقد يتعذر الحصول على البيانات كاملة.
- قد يكون المجتمـع الإحصـائي متصلا مجموعـة غيـر قابلـة للعـد مثـل مخـزون الجزائـر مـن البـترول ولمعرفة هذا المخزون يجب تنقيب جميع الأراضي و هذا شبه مستحيل.أو يمكن أن يكون المجتمع الإحصائي منفصلا لكن لا يمكن إجراء المسح الشامل لكبر حجم العينة مثل تعداد سكان الصين.
- حساسـية التجربة و ضيق الوقت فمثلا إذا أرادت شـركة الأدوية طرح دواء لمـرض سـاري مـع تحـذير للأضـرار الجانبيـة فلا تسـتطيع أن تنتظـر أن يتـم تجربتـه علـى جميـع المجتمـع لرصـد المضـاعفات ونسـبها.

2. أسلوب المعاينة

مفهوم أسلوب المعاينة

جزء من المجتمع الكلي قيد البحث وهنا يجب أخذ اقصي درجات الحيطة و الحذر عند أخذ العينة لكي تمثل المجتمـع تمـثيلا صـادقا و سـليما و هـذا يتطلـب منـا تحديـد هـدف الدراسـة الإحصـائية و تحديـد المجتمـع الإحصائي.

تنبيه : يقسم مجتمع الدراسة إلى قسمين :

مجتمع الهدف و مجتمع العينة وكلما كانا هذان المجتمعان قريبان من بعضهما كلما كانت نتائج الدراسة أكثر دقة.وكمثال عن ذلك ، الصعوبات التي واجه الطلبـة السـنة الثانيـة فـي كليـات الاقتصـاد فـي مـادة الإحصـاء مجتمع الهدف: هو جميع الطلبة السنة الثانية في كليات الاقتصاد.مجتمـع العينـة: الجـزء الـذي أخـذت منـه العينة بمعنى كليات التي أخذت منها العينة مثلا كلية الاقتصاد بالمركز الجامعي أفلو، كلية الاقتصاد بجامعة الأغواط .

تذكير : خطوات اختيار العينة

تحديد مجتمع الدراسة : بشكل دقيق من حيث التسمية و الخصائص التي تميـز أفـراده عـن غيرهـم حـتى نحدد حجم المجتمع ومدى تجانسه لأن ذلك يؤثر في عدد أفراد العينة ونوعية العينة التي سنختارها؛

- تحديد أفراد المجتمع الأصلي (*Define population*) :و ترتيبهم في جدول بأرقام متسلسـلة إن أمكـن ذلك لأن ذلك يسهل من اختيار عينة ممثلة للمجتمع بشكل أفضل.
- مراعاة عدم التحيز والخطأ *Control for bias and error* يكون الخطأ في انتقاء العينة من خلال الصدفة و الاختلافات العشوائية في المتغيرات التي تحدث عند تحديد أي عينة من المجتمع الأصلي للدارسة .
- تحديد العدد المناسب لأفراد العينة(*Determine sample size*) وذلك بناءا على عدة معايير:

- تباين المجتمع أو تجانسه: فكلما زاد تجـانس بيـن أفـراد المجتمـع فـان عـدد العينـة الممثلـة قليـل

- أسلوب البحث المستخدم: الدراسات المسحية تحتاج لعدد أفراد كبيرة لتمثيل المجتمع أما الدراسات التجريبية فيعتمد عدد أفراد العينة على عدد المجموعات التجريبية و الضابطة في الدراسة.
- درجة الدقة المطلوبة:وهو قرب نتائج العينة إلى الواقع الفعلي، النسبة الشائعة الاستخدام في التحليل الإحصائي هي 95 ،% وهي المعروفة بدرجة الثقة، فزيادة درجة الدقة يتطلب زيادة أفراد المجتمع ،ومن طرق التأكد من أن العينة تمثل المجتمع: طريقة التوزيع الطبيعي. وطريقة النزعة المركزية و التشتت.

ومنه يتم تحديد نوع العينة المستخدمة حسب مجتمع الدراسة (محدد/غير محدد)أو (محصور /غير محصور)أو إذا كان مجتمع الدراسة(متجانس/غير متجانس)

ث. طرق اختيار العينات

يوجد نوعان من العينات: العينات الاحتمالية حيث تسحب وحداتها بطرق عشوائية وتخضع بالتالي لقوانين الاحتمالات، ثم العينات أللاحتمالية حيث مبدأ اختيار أفرادها لا يخضع لقوانين موضوعية.

1. العينات العشوائية الإحتمالية(sample probability)

يقصد بالعينات العشوائية الاحتمالية(*sample probability*) بأنها الطريقة التي يتم بموجبها اختيار مفردات العينة من بين مفردات مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية صرفة دون أي تدخل شخصي من قبل المسؤول عن إجراء البحث، أي مبدأ تكافؤ الفرص.

ومن أهم خصائص العينة العشوائية الاحتمالية نجد:

المساواة بين احتمالات اختيار أي فرد من أفراد المجتمع الأصلي؛

. • العشوائية هي طريقة الباحث في تحقيق التكافؤ بين الأفراد؛

• تعطي الباحث عينة ممثلة لمجتمعها الأصلي بتكلفة أقل مع تجنب تحيز الباحث في الاختيار، وما ينتج عنها من مشكلات تشكك في صحة النتائج؛

• تشترك العينات الاحتمالية في تحديد مجتمع الدراسة، وإعداد قائمة بعناصره، ثم اختيار عينة بحجم يكفي لتمثيل خصائص المجتمع.

ا) *العينات العشوائية البسيطة* simple random sample

تعريف

وهي استخراج n عنصر من المجتمع N بحيث أن كل السحوبات يكون بنفس الاحتمال،أي أن كل عنصر يجب أن يسحب بطريقة مستقلة عن العناصر الأخرى». 2وهنا يجب تحديد أسلوب استخراج العينة.

تستخدم هذه العينة عندما يكون مجتمع البحث ذو درجة تجانس عالية، ويتم اختيار مفرداتها على أساس عشوائي، بمعنى إعطاء فرص متساوية لجميع وحدات المجتمع في الظهور في العينة،دون أي تحيز لأي وحدة .هنا يجب تحديد أسلوب استخراج العينة:

الأسلوب الأول:السحب بدون إرجاع وطبقا لهذا فإن المفردة التي تسحب لا تعاد مرة أخرى قبل إجراء السحب التالي وعليه فان عدد العينات التي حجمها (n) الممكن سحبها بدون إرجاع من مجمع حجمه(N) تساوي: $\frac{n!}{(N-n)!\times n!}$

الأسلوب الثاني: السحب مع الإرجاع طبقا لهذه الطريقة فإن المفردة التي سحبت تعاد مرة أخرى قبل إجراء السحب التالي وعليه فإن عدد العينات التي حجمها (n) الممكن سحبها مع الإرجاع من مجتمع حجمه (N) تساوي إلى : $N\cdot.\cdot.\cdot.\cdot N\cdot N\cdot N\cdot N = N^n$

مثال : رقم (1.1)

صندوق به 4بطاقات مرقمة بالأعداد التالية:1-2-3-4. نريد تشكيل عينة مكونة من رقمين من هذا المجتمع،فيكون الاختيار عشوائيا بالإرجاع وبدون أرجاع.

الحل:

عدد عناصر المجتمع N=4، عدد عناصر العينة:n=2

النتيجة	سحب البطاقة الأولى بالإرجاع					
16	4	3	2	1		سحب البطاقة الثانية بالإرجاع
	(1 4)	(1 3)	(1 2)	(1 1)	1	
	(2 4)	(2 3)	(2 2)	(2 1)	2	
	(3 4)	(3 3)	(3 2)	(3 1)	3	
	(4 4)	(4 3)	(4 2)	(4 1)	4	

النتيجة	سحب البطاقة الأولى بدون إرجاع					
6	4	3	2	1		سحب البطاقة الثانية بدون إرجاع
					1	
				(2 1)	2	
			(3 2)	(3 1)	3	
		(4 3)	(4 2)	(4 1)	4	

جدول رقم (2.1)

ملاحظة

يتم سحب مفردات العينة العشوائية البسيطة إما عن طريق القرعة أو جدول الأرقام العشوائية(أنظر الملحقات)أو عن طريق البرمجيات

ب) ***العينات العشوائية المنتظمة*** Systematic sample

تعريف

هي العينات التي يتم اختيار الوحدات من قائمة بتطبيق فترات منتظمة (بعض إحصائيين يعرفون الزيادة بمقسوم حجم المجتمع إلى حجم العينة) بحيث يتم اختيار مفردة التي تقع بعد عدد معين من المفردات مبتدئا من مفردة عشوائية، والعينة العشوائية المنتظمة أسهل و أسرع في التطبيق لأنها لا تحتاج إلى اختيار كل المفردات بطريقة عشوائية

تميز بانتظام الفترة بين وحدات الاختيار، تنتج عن العينة العشوائية المنتظمة توزيعا منتظما لأفراد العينة،لكن من عيوبها أنها :- لا تعطي عينة مماثلة لمجتمع البحث إذا كانت المفردات غير موزعة بطريقة عشوائية؛-وعدم استخدام العينة المنتظمة إذا كان قائمة مجتمع البحث لها خصائص تتطابق مع مقدار التمثيل.

مثال : رقم (2.1)

فإذا أريد دراسة وظيفة المدرسة ورتبت المدارس الابتدائية في ذلك القطاع ترتيبا أبجديا وكان عددها 300 مدرسة وكانت نسبة العينة 10% فالمسافة بين كل اختيار و الاختيار الذي يليه في هذه العينة هو k=10 ، و عدد مفردات العينة هو 30 مفردة ، و حددت النقطة الابتدائية بالمدرسة رقم 5 فإن العينة ستكون من الرتب التالية:

{15،25،35،45، ......}وهكذا حتى يجمع الباحث 30 مفردة أي مدرسة.

ج) ***العينات العشوائية العنقودية*** Cluster sample

وهي الطريقة التي يم بموجبها تقسيم المجتمع الإحصائي إلى عدد معين من المجموعات الجزئية أو الوحدات تم هذه الوحدات إلى وحدات أولية ثم إلى وحدا ثانوية و يطلق على كل منها بالعنقود، و تستخدم هذه الطريقة عندما يكون مجتمع البحث كبيرا ومتسعا جغرافيا ، و تتميز هده الطريقة بسهولة استخدامها كما أنها توفر الجهد و الوقت في جمع البيانات وهي متاحة في حالة تعذر تحديد أطر كاملة عن عناصر المجتمع لكن من عيوبها أنها كفائتها ترتبط بمدى تجانس وحدات.

د) العينات العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

تناسب هذه العينة المجتمع غير متجانس وهي العينة التي يتم فيها تقسيم المجتمع إلى فئات أو طبقات تمثل خصائص المجتمع، ثم يتم الاختيار العشوائي ضمن كل فئة أو طبقة .وهناك ثلاثة مستويات للدقة في اختيار حجم هذا النوع من العينات وهي كما يلي:

1- التوزيع المتساوي

يقسم مجتمع البحث إلى الشرائح،الأقسام،و الطبقات التي يشتمل عليها بشكل متساوي.

مثال : رقم(3.1)

يقسم مجتمع منطقة ما إلى موظفين/و أصحاب مهن حرة، ومتقاعدين، وطلبة و ربات بيوت، لغرض دراسة خدمات المستشفيات أوالمكتبات أو المدارس ، المقدمة اليهم. فإذا كان حجم العينة المطلوبة للبحث هو 300 من كل الشرائح هذه الشرائح الخمسة، فإنه يؤخذ عدد متساوي من كل هذه الشرائح و هي كالأتي:

موظفين 60 ،و أصحاب مهن حرة 60 ، ومتقاعدين 60 ، وطلبة 60و ربات بيوت 60.

2-التوزيع المتناسب

تم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى فئات متجانسة و يتم اختيار مفردات العينة من كل فئة ليتناسب مع حجم تلك الفئة من المتجمع أي التمثيل النسبي.

فلو فرضنا بأن لدينا المجتمع الإحصائي الذي حجمه N إلى فئات متجانسة I_1،I_2،......I_K حيث حجم الفئة $I_1=n_1$ و حجم الفئة $I_2=n_2$ ،.... وحجم الفئة $I_n=n_K$ شريطة أن $N=n_1+n_2+n_3+....n_K$ ، و أردنا اختيار عينة حجمها n من هذا المجتمع بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة فأننا نتبع الأسلوب التالي:

حجم العينة المسحوبة من الفئة =حجم العينة الكلي ×(حجم الفئة ÷حجم المجتمع)

مثال : رقم (4.1)

مجتمع مكون من 1000 طالب جامعي وهو موزع على ثلاث طبقات حسب السنة الدراسية : السنة أولى 600 طالب ، السنة ثانية 300 طالب و السنة ثالثة 100طالب.

المطلوب: اختيار عينة طبقية عشوائية مكونة من 100 شخص؟

الحل:المجتمع مكون من 1000 طالب أي نسبة 100 % ومنه فان نسبة السنة الأولى من المجموع تمثل 60 % والسنة الثانية تمثل 30 % و السنة الثالثة تمثل 10 % و على أساس هذا التقسيم فإن العينة المكونة من 100 طالب تتشكل من 60 طالب سنة أولى و 30 طالب سنة ثانية و 10 طالب سنة ثالثة.

3- التوزيع الأمثل

تستخدم هذه الطريقة في توزيع حجم العينة على الطبقات المختلفة نظرا لوجود الانحرافات المعيارية وإختلاف حجمها من مجموعة إلى مجموعة أخرى.

مثال : رقم(5.1)

لدينا نفس معطيات المثال السابق إذا علمنا أن الانحرافات المعيارية لهذه الطبقات على الترتيب كما يلي: 5،3،2

الطبقة	النسبة	الانحراف المعياري	% δ	% δ/ somme(% δ)	N*(% δ/ somme(% δ))
السنة الاولى	0,6	2	1,2	0,46	**462**
السنة الثانية	0,3	3	0,9	0,35	**346**
السنة الثالة	0,1	5	0,5	0,19	**192**
المجموع	**1**		**2,6**	**1**	**1000**

عند اختيار أية عينة نتوخى بالطبع صحة اختيارها، لتكون ممثلة للمجتمع الإحصائي الذي أخذت منه ، والعينة التي تمثل مجتمعها تمثيلا صادقا، هي تلك التي تتفق مقاييسها الإحصائية مع المقاييس الإحصائية للمجتمع في الوسط الحسابي والانحراف المعياري و غيرها و تسمى عينة معيارية .

2. العينات غير العشوائية(اللاإحتمالية) non probability sample

تعرف العينات غير الاحتمالية بأنها الطريقة التي يم بموجبها اختيار مفردات العينة من بين مفردات المجتمع الإحصائي بشكل لا يخضع إلى مبدأ تكافؤ الفرص في ظهور أي مفردة ، بمعنى أخر اختيار المفردات تتأثر بالباحث وحكمة الشخصي ,وذلك لاعتبارات تتعلق بموضوع الدراسة مثل دراسة أحوال المدمنين أو المنحرفين أو المتهربين من الضرائب إن مثل هذه المجتمعات محددة وأفرادها ليسوا معروفين فلا نستطيع أخذ عينة عشوائية منهم بحيث تمثلهم بدقة ،فيعتمد الباحث إلى أسلوب العينة غير العشوائية ويختار عينة حسب معايير معينة يضعها الباحث ،فالباحث هنا يتدخل في اختيار العينة ويقرر من يختار ومن يهمل من المجتمع الأصلي للدراسة.

من مزايا هذا النوع أنه :

- انخفاض تكلفة البحث؛
- سهولة الوصول إلى الوحدات المبحوثة؛
- تقليص آجال إنجاز البحث الميداني وآجال توفير ونشر النتائج؛
- إعطاء نتائج وتقديرات ذات جودة حسنة خاصة إذا تم اتخاذ الإجراءات الكافية لاختيار العينة بشكل يحقق تمثيليتها للمجتمع المدروس؛
- تفادي الحصول على إطار المعاينة لسحب العينة.

وفي المقابل، للعينة الغير احتمالية بعض العيوب منها على الخصوص :

- أخذ العينات متحيز كلية وبالتّالي تكون النتائج متحيزة أيضا مما يجعل الأبحاث متضاربة؛
- عدم إمكانية حساب احتمالات سحب العينة وبالتالي عدم إمكانية حساب المؤشرات المرتبطة بدقة المقدر أو بهامش الخطأ؛
- بعض مفردات المجتمع لها احتمال منعدم للظهور في العينة.

ا) 1عينة كرة الثلج snowball sample

حيث يبدأ الباحث بعينة صغيرة،ثم تبدأ بالكبر مع سير الدراسة ويستخدم هذا النوع من العينات في المجتمعات النادرة. من خلال البدء باختيار شخص يستوفي المواصفات الموضوعة للاختيار ضمن العينة ثم نطلب منه أن يقترح آخرين بنفس المواصفات.على الرغم من أن هذه الطريقة من طرق اختيار العينة لا تمثل المجتمع تمثيلاً حقيقياً لكنها مفيدة في بعض الأحيان عندما يصعب الوصول إلى أفراد مجتمع الدراسة.

مثال : رقم(6.1)

إذا كان الباحث يقوم بدراسة عن المشردين فلن يجد قوائم تحمل أسماءهم في منطقة الدراسة لذلك عليه تحديد بعض المشردين ثم يطلب منهم أن يرشدوه إلى المشردين الآخرين.

ب) العينة الغرضية أو الحكمية أو الهادفة Sample Purposive

سميت هذه العينة بهذا الاسم نظرا لان الباحث يقوم باختيارها طبقا للغرض الذي يستهدف تحقيقه من خلال البحث، ويتم اختيارها على أساس توفر صفات محددة في مفردات العينة تكون هي الصفات التي تتصف بها مفردات المجتمع محل البحث.

مثـال : رقم(7.1)

لو أراد باحث دراسة آراء المستهلكين حول صنف من أصناف القهوة سريعة الذوبان فعلية أن يختار عينة مـن الأفراد الذين لديهم بعض التجربة والمعرفة بهذا الصنف من القهوة، لأنه من الغير المنطقي أن تتضمن العينة أفراد لا يشربون هذا الصنف من القهوة.

ج) *العينة الملائمة المناسبة* Convenience sample

تعتمد هذه الطريقة على سهولة الوصول إلى مواضيع مثل إعداد استطلاع رأي للعملاء في مركـز تجـاري أو للمارة في أحد الشوارع المزدحمة. وعادة ما يطلق عليه طريقـة أخذ العينـات المريحـة ، حيـث يـتم تنفيـذه على أساس مدى سهولة اتصال الباحث مع الموضوعات. لا يمتلك الباحثون أية سلطة علـى اختيـار عناصـر العينة ويتم الاختيار بشكل بحت على أساس القـرب وليـس التمثيـل.يستخدم أسـلوب أخـذ العينـات الغيـر احتمالية عندما يكون هناك قيود مفروضة على وقت وتكلفة جمع ردود الفعل. في الحالات الـتي يكـون فيهـا قيود علي الموارد مثل المراحل الأولية من البحث، يتم استخدام طريقة أخذ العينة الملائمة .

مثـال : رقم(8.1)

الشركات الناشئة والمنظمات الغير حكومية عادة ما يقومون بـإجراء أخـذ العينـة المريحـة فـي مركـز تجـاري لتوزيع منشورات عن للأحداث القادمة أو لتعزيز قضية ما – يفعلون ذلك بالوقوف عند مـدخل المركـز التجـاري وتوزيع النشرات عشوائياً.

د) *العينة الحصصية* Quota sample

ترتكز العينة الحصصية على فرضية تعتـبر أن الخاصيـات الـتي تسـم مفـردات المجتمـع هـي غالبـا مـا تكـون مرتبطة بعضها ببعض. وعليه، يمكن التحكم في تمثيلية العينة للمجتمع المدروس من خلال اختيـار الصـفات التي تعبر إلى أبعد حد عن الخاصيات والظواهر المراد قياسها من خلال العينة. تسمى هذه المتغيرات التي تعتمد لتحقيق تمثيلية العينة للمجتمع بضوابط العينة الحصصية

وهكذا، تعرف العينة الحصصية علـى أنـها صـورة مصغرة للمجتمـع المـدروس مـن حيـث الضـوابط الـتي تـم اختيارها لتحقيق تمثيلية العينة للمجتمع. غالبـا مـا يختـار لهـذه الغايـة مصـممو العينـات الصـفات المرتبطـة بالجنس والسن والمستوى الاقتصادي والاجتماعي للأفراد. والجدير بالذكر أن العيـن الحصصية تختلـف عـن العينة الطبقية بأسلوب السحب حيث أن هذه الأخيـرة يتـم مـن خلال أسـلوب العينـة العشـوائية البسـيطة بينما الأولى يتم بأسلوب الملائمة.

مثـال : رقم(9.1)

إذا أردنا دراسة ميل مجتمع الجزائري نحو ميوله للنشاطات الرياضية مستخدمين عينة حصصيه فإننـا نعمـل على النحو التالي:

-المنطقة الجغرافية: حيت يتـم تقسـيم المجتمـع حسـب الإقليـم (وســـط/شمال/جنوب)على أسـاس أن التفاوت في مستوى المعيشة سيعكس تفاوتا في الميول نحو النشاطات الرياضية.

-فئة السـن:على أساس أن الفئة الشبابية هم أكثر إقبالا علـى ممارسـة الرياضـة بدرجـة أكبـر مـن الفئـات الأخرى.

-الجنس:على أساس أن الذكور هم أكثر إقبالا على الإناث على ممارسة الرياضة.

ولنفترض أن البيانات التي تخص المجتمع الجزائري كما يلي :

	المنطقة الجغرافية					
	الشمال		الوسط		الجنوب	
سن/جنس	ذكور	إناث	ذكور	إناث	ذكور	إناث
دون 18سنة	15 000	5 000	20 000	15 000	6 000	2 000
35-18	20 000	8 000	30 000	20 000	8 000	4 000
فما فوق 35	5 000	1 000	10 000	8 000	2 000	1 000
المجموع	40 000	14 000	60 000	43 000	16 000	7 000

سن/جنس	الشمال		الوسط		الجنوب	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث	ذكور	إناث
دون 18سنة	150	50	200	150	60	20
35-18	200	80	300	200	80	40
35 فوق فما	50	10	100	80	20	10
المجموع	**400**	**140**	**600**	**430**	**160**	**70**

(المنطقة الجغرافية)

ثم يقوم الباحث بجمع البيانات من هذه العينة بأسلوب العينة الملائمة.

ج. تمرين

[216 ص 9 حل رقم]

الإحصاء الاستدلالي هو علم يبحث في جمع البيانات وعرضها وتبويبها ,أجب بصحيح أو خطأ

- صحيح
- خطأ

چ. تمرين

[216 ص 10 حل رقم]

البيانات الوصفية هي المشاهدات أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة كالعد و التقييس،أجب بصحيح أو خطأ

- صحيح
- خطأ

ح. تمرين :تصنيف البيانات الإحصائية

[216 ص 11 حل رقم]

صنف البيانات الإحصائية

1- بيانات ترتيبية
2- بيانات كمية منفصلة
3- بيانات اسمية
4- بيانات كمية مستمرة

بيانات كمية بيانات وصفية

[216 ص 12 حل رقم]

ماهو المجتمع غير محدود؟

- مجتمع الطيور المهاجرة
- مجتمع الطلبة في كلية معينة
- مجتمع الوسطاء في البورصات

د. تمرين

[216 ص 13 حل رقم]

يوجد نوعان من العينات: العينات ______ حيث تسحب وحداتها بطرق عشوائية وتخضع بالتالي لقوانين الاحتمالات، ثم العينات ______ حيث مبدأ اختيار أفرادها لا يخضع لقوانين موضوعية.

ذ. تمرين

[215 ص 8 حل رقم]

تصنيف العينات

1- عينة كرة الثلج
2- العينة العشوائية البسيطة
3- العينة العشوائية العنقودية
4- العينة العشوائية الطبقية
5- العينة الغرضية أو الحكمية أو الهادفة
6- العينة العشوائية المنتظمة
7- العينة المعيارية
8- العينة الملائمة المناسبة
9- العينة الحصصية

أنواع العينات غير العشوائية

أنواع العينات العشوائية الاحتمالية

ر. تمرين

[217 ص 14 حل رقم]

ما هي أساليب جمع البيانات المباشرة؟

- [ ]
- [ ] المقابلة
- [ ] جهات مختصة بجمع المعلومات
- [ ] الملاحظة

ز. العينة العشوائية

إستخرج عينة عشوائية

أجريت دراسة للتعرف على أسباب انخفاض المستوى العلمي لطلبة أحد الأقسام العلمية في كلية الاقتصاد .وقد تطلب أستطلاع رأي 20طالب وطالبة من بين طلبة القسم البالغ عددهم 160 طالب وطالبة.

سـؤال

[217 ص 15 حل رقم]

تحديد الطلبة الذي سيشملهم الاستطلاع بشكل عشوائي من بين طلبة القسم.

ژ. تمرين

[217 ص 16 حل رقم]

عند دراسة اتجاهات طلبة ليسانس بمعهد العلوم الاقتصادية بالمركز الجامعي بأفلو، نحو تخصصات الماستر المتاحة بها بالأقسام الأربعة، تم الحصول على البيانات المدونة في الجدول أدناه

التخصص	علوم التسيير	مالية و محاسبة	علوم تجارية	علوم إقتصادية	مجموع
عدد الطلبة	30	30	20	20	100

المطلوب : استخرج عينة طبقية مكونة من 10 اشخاص.

- ○ علوم التسيير 3 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 2، علوم اقتصادية 2
- ○ علوم التسيير 3 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 3، علوم اقتصادية 1
- ○ علوم التسيير 2 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 2، علوم اقتصادية 3

س. تمرين :مراحل البحث العلمي باستخدام الإحصاء

[217 ص 17 حل رقم]

1.جمع البيانات
2.تحديد هدف الدراسة
3.و صفها

5.تحليلها

جواب : ____ ____ ____ ____ ____

* *

*

يزخر علم الإحصاء بالعديد من المصطلحات والمفردات اللغوية الخاصة به والتي يعد الإلمام بها خطوة هامة لفهم المتعمق للمحاور المتعلقة كما أن الإلمام بهذه المفاهيم تسمح لك بمعرفة كيفية التعامل معها واختيار الأداة الإحصائية المناسبة لمعالجة البيانات التي تقوم بجمعها. و يعد اختيار الأسلوب الإحصائي الملائم يتحدد وفقا لأهداف الباحث ونوعية البيانات المتاحة التدرج من البساطة إلى التعقيد.

IX

تمرين

واجب جماعي (لا يتعدى أفراد المجموعة أربعة)

بعد أن تعرفت على أنواع العينات و مزاياها ، استخرج إيجابيات و سلبيات كل نوع على حدى يسلم العمل قبل بداية الامتحانات .

IX

الفصل الثاني: توزيع المعاينة

الأهداف الخاصة بالفصل الثاني

يهدف هذا الفصل إلى تحقيق جملة من الأهداف هي:
1. أن يفرق بين إحصاءات العينة ومعلمات المجتمع المشتقة منه .
2. أن يتعرف على مستويات الدلالة وكيفية استخدامها وفهم المغزى منها وتجنب الوقوع في الأخطاء المرتبطة بها .
3. الربط بين بيانات العينة (المقدرات)و قيم المجتمع(المعلمات)؛
4. تمكن الطالب من تعميم نتائج المعاينة على المجتمع المدروس؛
5. استخدام مقاييس أو مؤشرات المحسوبة لتوزيع المعاينة في التقدير النقطي و التقدير بمجال؛
6. إعطاء فكرة عن أهمية توزيع المعاينات بالنسبة لاختبار الفرضيات الإحصائية.

مقدمة

تطرقنا في الفصل السابق عن العينات و طرق اختيارها ومنه التوصل إلى استقراءات و استنتاجات عن المجتمع المدروس من خلال معرفة المؤشرات التي يتم الحصول عليها من واقع مشاهدات العينة التي تم اختيارها من ذلك المجتمع،وعليه فإن توزيع المعاينة تحقق العلاقة بن العينة و المجتمع.

آ. مفاهيم أساسية حول توزيع المعاينة

يعد فهم توزيع المعاينة مدخلا مهما لفهم موضوع الإحصاء الاستدلالي ، حيث يستخدم توزيع إحصاءات العينة بشكل واسع في موضوع التقدير واختبار الفرضيات الإحصائية.

1. مقاييس المجتمع و العينة

يخضع المجتمع الذي تؤخذ منه العينة لتوزيع معين هو التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يمثل أفراد ذلك المجتمع ، وكما درست سابقا فإنه يوجد في التوزيع الاحتمالي عادة ثوابت تعين هذا التوزيع تماما وتسمى المعلمات أو المعالم(الأمل الرياضي والتباين). و المعلمة :هي الثوابت إلي تميز المجتمع الإحصائي ككل،

ألإحصائه :فهي متغير عشوائي لأن قيمته تتغير من ملاحظة عينة إلى أخرى أي تحسب قيمته مـن كافـة العينات بحجم محدد من مجتمـع مـا. كمـا أن اقـتران تعيـن قيمتـه مـن العينـة أي اسـتنتاج قيمـة المعلمـات (المسـتدل عليها) من قيمة الإحصاءات والإحصاءات بوصفها مقدر لمعلمة المجتمع. (متوسط العينة X يعمـل كمقدر للمتوسط المجتمع μ) .

من أهم المقاييس الإحصائية المستخدمة هي :

- مقاييس النزعة المركزية أهمها الوسط(المتوسط) الحسابي؛
- مقاييس التشتت: التباين و الانحراف المعياري؛

المقاييس	المجتمع(المعالم)	العينة(المقدرات)
المتوسط الحسابي الكمي	μ	X
المتوسط الحسابي النوعي (النسبة)	P	$\hat{p}$
التباين	σ^2	S^2

2. تعريف توزيع المعاينة

تعريف

يعرف توزيع المعاينة بأنه عبارة عن "توزيع كافة القيم المحتملة التي يمكن افتراضـها بإحصائه مـا مسـحوبة على أساس عينات مختلفة بنفس الحجم اختيرت عشوائيا من نفس المجتمع.

ملاحظة

نفرض أن $X_1,X_2,X_3,X_4....X_n$ عينة عشوائية متكونة مـن x_i متغيـرة , ألإحصـائه هـي دالـة تابعـة للمغيـرات العشوائية للعينة ، ومنه فإن كل عينة تشكل إحصائية مختلفة عن سابقتها رغم أن حجم العينـة نفسـها n ومنه فإن الإحصائيات هي الأخرى متغير عشوائي نقوم بدراسة توزيعه وهو ما يسمى بتوزيع المعاينة.

ب. توزيع المعاينة للمتوسط

سنحاول في هذا المبحث دراسة الأمل الرياضي والتباين لتوزيع العينة و المجتمع و العلاقة بينهما: $V(S^2)$ $V(\sigma^2)$, $E(\overline{X})$,$E(\mu)$,

1. متوسط و تباين توزيع المعاينة للمتوسطات

إن الهدف من أخذ العينة هو معرفة خصـائص مجتمعهـا، فأخـذ العينـات ليـس القصـد منـه العينـة لـذاتها بـل المجتمع الذي أخذت منه ، فالعينة وسيلة وليست الهدف.فلذلك يكـون حسـاب قيمـة المتوسـط الحسـابي من بيانات العينة ليس هدفاً في حد ذاته ولكن وسيلة للتعرف على المتوسط الحسـابي للمجتمـع موضـوع الدراسة.

أسـاسـي : نظرية رقم(1,2)

إذا أخذت جميع العينات المحتملة من مجتمعها فتتوقع أن تكون متوسطات العينـات موزعـة بالتسـاوي حـول متوسط مجتمع الدراسة. وبعبارة أخرى، إن متوسط متوسـطات العينـات يسـاوي متوسـط مجتمعهـا مهمـا كانت طريقة السحب 13.

مثال : رقم (1.2)

مجتمع إحصائي مكون من مؤسسات حجمها 5 وعناصرها هي عدد سنوات مند أول إدراج للحاسب الألي.
نريد سحب جميع العينات ذات الحجم n=2
المطلوب:

- حساب معلمات المجتمع(المتوسط و التباين).
- تحديد العينات.
- حساب المتوسط والتباين في حالة الإرجاع و بدون إرجاع.

سنقوم أولا بتحديد متوسط المجتمع حسب المعادلة التالية : $\mu = E(\overline{X}) = \sum X_i / N$ كما هو موضح في الجدول أذناه

الشركة	السنوات	V(X)
A	8	1
B	8,5	0,25
C	9	0
D	9,5	0,25
E	10	1
المجموع	**45**	**2,5**
المتوسط	**9**	/
التباين	/	**0,5**

ومنه المتوسط الحسابي للمجتمع هو 9 و تباينه 0،5
1. عدد العينات بالإرجاع هو $N^2 = 5^2 = 25$
2. عدد العينات بدون إرجاع هو 10 $= 3!2!/5! = C^2_5$

و عليه عدد العينات الممكنة موضحة في الجدولين الأتيين:

	حساب المتوسطات بالارجاع					
حساب المتوسطات بالارجاع		A=8	B=8,5	C=9	D=9,5	E=10
	A=8	8,00	8,25	8,50	8,75	9,00
	B=8,5	8,50	8,50	8,75	9,00	9,25
	C=9	8,50	8,75	9,00	9,25	9,50
	D=9,5	8,75	9,00	9,25	9,50	9,75
	E=10	9,00	9,25	9,50	9,75	10,00

	حساب المتوسطات بدون الارجاع					
حساب المتوسطات بدون الارجاع		A=8	B=8,5	C=9	D=9,5	E=10
	A=8		8,25	8,50	8,75	9,00
	B=8,5			8,75	9,00	9,25
	C=9				9,25	9,50
	D=9,5					9,75
	E=10					

نقوم بحساب المتوسط الحسابي لكل عينة ثم نستخرج الجدول التوزيع التكراري كما هو موضح في الجدول أذناه

بالارجاع			
المتوسطات(Xi)	Fi	Xi Fi	V(Xi)
8,00	1	8,00	1,00
8,25	2	16,50	1,13
8,50	3	25,50	0,75
8,75	4	35,00	0,25
9,00	5	45,00	0,00
9,25	4	37,00	0,25
9,50	3	28,50	0,75
9,75	2	19,50	1,13
10,00	1	10,00	1,00
المجموع	**25**	**225**	**6,25**
E(X)	/	9	/
V(X)	/	/	**0,25**

بدون ارجاع			
المتوسطات(Xi)	Fi	Xi Fi	V(Xi)
8,25	1	8,25	0,56
8,50	1	8,5	0,25
8,75	2	17,5	0,13
9,00	2	18	0,00
9,25	2	18,5	0,13
9,50	1	9,5	0,25
9,75	1	9,75	0,56
المجموع	**10**	**90**	1,88
E(X)	**9**	/	/
V(X)	/	/	**0,19**

نقوم بحساب متوسط و تباين المتوسطات كما هو موضح في الجدول أعلاه ثم نقوم بمقارنة النتائج حيث نجد أن:

- متوسط المجتمع يساوي متوسط متوسطات العينة مهما كانت طريقة السحب (بالإرجاع أو بدون إرجاع)
- أما تباين متوسط العينات فهو يساوي :

1. في الإرجاع: يساوي تباين المجتمع مقسوم على حجم العينة ؛
2. بدون إرجاع : يساوي تباين المجتمع مقسوم على حجم العينة مضروبا في معامل التصحيح.

أساسي : نظرية رقم (2.2.)

كان المتغير العشوائي (X) يخضع لتوزيع معين، متوسطه (µ) و تباينه (σ^2) اخترت عينة عشوائية من هذا المجتمع بحجم (n) و كان المتغير العشوائي $\bar{X}$ يمثل المتوسط الحسابي للعينات المسحوبة فإن التوقع الرياضي لمتوسط توزيع المعاينة هو متوسط المجتمع $E(\bar{X})=\mu$ وتباينها بالإرجاع (مجتمع لا نهائي)هو تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ و تباينها بدون إرجاع(مجتمع محدود)هو كما يلي: $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\times\frac{N-n}{N-1}$

مثال : رقم (2.2)

مجتمع حجمه N=1000 بمتوسط 25 =µ و انحراف معياري σ=15 نسحب العينات الممكنة

أحسب المتوسط الحسابي للعينة و الانحراف المعياري إذا كان حجم العينة $n_1=30$ و $n_2=100$

الحل:

$$1-\frac{n}{N}=\frac{30}{1000}=0{,}03<0{,}05\Rightarrow VAR(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{225}{30}=7{,}5\Rightarrow S=2{,}74$$

$$2-\frac{n}{N}=\frac{100}{1000}=0{,}10>0{,}05\Rightarrow VAR(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}=\frac{225}{100}\cdot\frac{1000-100}{1000-1}=3{,}027\Rightarrow S=1{,}42$$

2. طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات

سنعرض بالتفصيل الحالات المختلفة لإيجاد توزيع متوسط العينة

أساسي : نظرية رقم (3.2) : توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي لمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم

إذا كان $X_1,X_2,X_3.....X_n$عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي ووسطه µ و تباينه σ^2 معلومان فإن توزيع $\bar{X}$ يكون توزيع ذا الوسط µ و تباين $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ أي أن المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري Z مهما كان حجم العينة حيث: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ و نكتب $\bar{X}\rightarrow(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

أساسي : نظرية رقم (3.2) : توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي لمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم

إذا كان $X_1,X_2,X_3.....X_n$عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي ووسطه µ و تباينه σ^2 معلومان فإن توزيع $\bar{X}$ يكون توزيع ذا الوسط µ و تباين $V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ أي أن المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري Z مهما كان حجم العينة حيث: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ و نكتب $\bar{X}\rightarrow(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

نصيحة

• نستخدم العلاقة الانحراف المعياري التالية: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ في حالة المجتمع غير محدود الحجم(غير منتهي). أو محدود الحجم (منتهي) و السحب بالإرجاع، أو معامل الاستقلالية أقل من 0,05

• و نستخدم العلاقة التالية للانحراف المعياري: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ في حال كان مؤشر الاستقلالية أكبر من $\frac{n}{N}\geq 0,05$ أو في حال المجتمع محدود و السحب بدون إرجاع .

مثال : رقم (3.2)

مجتمع حجمه 900 بمتوسط μ =20 و σ =12 . نستخرج كل العينات الممكنة لحجم (n = 36). أحسب احتمال أن يكون المتوسط محصورا بين 18 و 22.

الحل:

$$N=900, n=36, \mu=20, \frac{n}{N}=\frac{36}{900}=0,04<0,05$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12}{6}=2$$

$$\frac{X_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leq\frac{X_2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{18-20}{2}\leq Z\leq\frac{22-20}{2}$$

$$-1\leq Z\leq 1$$

$$P(Z<1)-P(Z<-1)=0,84134-0,15866=0,68268$$

نفس معطيات المثال السابق لكن حجم العينة هو 64.

الحل:

$$N=900, n=64, \mu=20, \frac{n}{N}=\frac{64}{900}=0,071>0,05$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\frac{12}{8}\times\sqrt{\frac{900-64}{900-1}}=1,39$$

$$\frac{X_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\leq\frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\leq\frac{X_2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$\frac{18-20}{1,39}\leq Z\leq\frac{22-20}{1,39}$$

$$-1,44\leq Z\leq 1,44$$

$$P(Z<1,44)-P(Z<-1,44)=0,92507-0,07493=0,85$$

أساسي : نظرية رقم (4.2): توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي لمجتمع توزيعه مجهول و تباينه معلوم و حجم العينة أكبر من 30 (نظرية النهاية المركزية)

• إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع توزيعه مجهول ووسطه μ و تباينه σ^2 معلوم فإن توزيع المتوسط الحسابي للتوزيعات $\bar{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري Z كلما كان حجم العينة كبيرا (أي أكبرو يساوي من 30)، نستخدم نظرية النهاية المركزية حيث أن $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تؤول إلى التوزيع الطبيعي ونكتب $Z\rightarrow(0،1)$

مثال : رقم (4.2):

تم سحب عينة عشوائية بحجم 100 مشاهدة من مجتمع مجهول التوزيع و تباينه 16، فبلغ المتوسط الحسابي للعينة 10 . فما هو احتمال أن يكون متوسط توزيع المعاينة أكبر من 12 $X>12$

الحل:

حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة للمتوسط تتبع التوزيع الطبيعي ومنه يمكن كتابة المتغير Z

$$n=100\,,\mu=10\Rightarrow\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{16}{10}=1{,}6$$

$$\frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>\frac{X_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\Rightarrow Z>\frac{12-10}{1{,}6}\Rightarrow Z>1{,}25$$

$$P(Z>1{,}25)=1-P(Z<1{,}25)=1-0{,}89435=0{,}11$$

أساسي : نظرية رقم (5.2): توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي لمجتمع توزيعه طبيعي و تباينه مجهول و حجم العينة أكبر 30

في الكثير من التطبيقات المتعلقة باستعمال الوسط الحسابي $\bar{X}$ يكون تباين المجتمع مجهولا σ^2، لذلك نستعمل تباين العينة غير المتحيز S'^2 حيث $\grave{S}^2=\frac{\sum(X_i-\bar{x})^2}{n-1}$ و يكون المتغير $\frac{\bar{X}-\mu}{\grave{S}/\sqrt{n}}$ خاضعا لتوزيع يمكننا تقريبه من التوزيع الطبيعي المعياري ما دامت $n>30$.

مثال : رقم (5.2):

مجتمع توزيعه طبيعي و متوسطه يساوي 7 و تباينه مجهول ،ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 8 مع العلم أن حجمها يساوي 36 بتباين غير متحيز 9.

الحل: بما أن التوزيع طبيعي و التباين مجهول و حجم العينة أكبر من 30 فالمتغيرة Z تؤول إلى التوزيع الطبيعي.

$$n=36\quad,\quad \grave{S}^2=9\quad,\quad \mu=\mu_{\bar{x}}=7\quad,\quad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\grave{S}}{\sqrt{n}}=\frac{3}{6}=0{,}5$$

$$Z=\frac{X-\mu}{\frac{\grave{S}}{\sqrt{n}}}=\frac{8-7}{0{,}5}=2$$

$$P(Z<2)=0{,}9772$$

أساسي : نظرية رقم (6.2): توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي لمجتمع توزيعه طبيعي ووسطه معلوم و تباينه مجهول و حجم العينة أقل من 30

إذا أخدت عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي ووسطه μ , و تباينه غير معلوم σ^2 ، و إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيعات $\bar{X}$ لعينة حجمها أقل من 30 $n<30$،وكان الانحراف المعياري لهذه العينة محسوب بمتوسط المجتمع) فإن المتغير $\bar{X}$ يخضع لتوزيع ستودنت T حيث:

ملاحظة

في حال كان متوسط المجتمع غير معلوم هو الأخر فهناك حالتين لحساب تباين العينة :

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\quad,\quad S^2=\frac{1}{n}\cdot\sum(X_i-\bar{X})^2$$

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\grave{S}/\sqrt{n}}\quad,\quad \grave{S}^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum(X_i-\bar{X})^2$$

أذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي بحيث($N(8,5\ \sigma^2)$ و حجم العينة

وهو أوجد التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينة (9 10 9 8 8 7 8 5 8) ثم أحسب p(7<x<9)

الحل:

$$n=9 \quad , \quad \mu_{\bar{x}}=\mu=8{,}5 \quad , \quad \bar{X} \sim T(8)$$

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{72}{9}=8 \quad , \quad \grave{S}^2=\frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{\sum (X_i-8)^2}{9-1}=2$$

$$T=\frac{\bar{X}-8{,}5}{\sqrt{\frac{2}{9}}} \sim T(8)$$

$$\frac{7-8{,}5}{\sqrt{\frac{2}{9}}}<T<\frac{9-8{,}5}{\sqrt{\frac{2}{9}}}, \quad P(T<-X)=P(T>X) \quad , P(T<x)=1-P(T>X)$$

$$P(-3{,}19<T<1{,}06)=P(T<1{,}06)-P(T<-3{,}19)=1-P(T>1{,}06)-P(T>3{,}19)$$

$$1-0{,}1-0{,}01=0{,}89$$

$$P(7<\bar{X}<9)=0{,}89$$

مثال : رقم (7.2)

إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية المنتجة بواسطة أحد المصانع تتبع توزيعا طبيعيا ، و يدعي صاحب المصنع أن متوسط أعمار هذه المصابيح هو 500 µ في الساعة ، و لمتابعة جودة الإنتاج يتم أخذ 20 مصباح شهريا, و يكون الإنتاج مطابقا للمواصفات إذا كانت قيمة t المحسوبة من عينة عشوائية تقع في الفترة $-t_{0,5}$ ، $t_{0,5}$ هل العينة مطابقة للمواصفات إذا علمت أن متوسط الحسابي و الانحراف المعياري للعينة هو على التوالي 530 و 20

الحل:

من جدول التوزيع t نجد أن قيمتها الجدولية أمام درجة الحرية 19 و أسفل مستوى الخطأ (المعنوية)0،05 هي 1،729 ، و على ذلك يكون الإنتاج مطابقا للمواصفات أذا وقعت قيمة t المحسوبة من العينة داخل الفترة -1،729و1،729

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}_n/\sqrt{n}}=\frac{530-500}{\frac{20}{\sqrt{20}}}=6{,}708$$

أي أنها تقع خارج الفترة و لكنها من ناحية اليمين حيث قيمة المتوسط للأعمار المصابيح في العينة 530 أكبر من متوسط المجتمع الذي يساوي 500 و بالتالي فالإنتاج أفضل من المطلوب.

ب. توزيع المعاينة للنسب

في العديد من المجالات الاقتصادية تستخدم نسب العينات $\hat{p}$ لعمل استدلالات حول نسبة المجتمع P

1. حساب متوسط و تباين توزيع المعاينة للنسب

نفرض أن مجتمعا ما لا نهائي، ويتوزع وفقا للتوزيع الثنائي فيها احتمال النجاح p و احتمال الفشل q=1-p حيث p+q=1.

للحصول على عينة حجمها n فإنه يتوجب اعادة التجربة n من المحاولات .

إن توزيع المعاينة للمتغير X الذي هو عدد محاولات النجاحات في العينة ذات الحجم n يكون قريبا من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\mu=np$ قدره و انحراف معياري قدره $\sigma=\sqrt{p\times q\times n}$ ، بشرط أن تكون قيمة النسبة محصورة بين الصفر و الواحد.

ومنه لكل عينة من الحجم n يمكن تحديد نسبة النجاح في العينة $\hat{p}$ ، إن قيمة $\hat{P}=\frac{X}{n}$ تختلف من عينة إلى أخرى، لذا يمكن اعتبارها قيمة من قيم الإحصائية $\hat{p}$ فتوزيع المعاينة لـ $\hat{p}$ هو توزيع قريب من التوزيع

الطبيعي إذا كان حجم العينة كبيرا (n<30) بمتوسط حسابي $\mu_{\hat{p}}=E(\hat{P})=E(\frac{X}{n})=E(\frac{np}{n})=p$;

وتباين $Var(\hat{p})=\sigma_{\hat{p}}^2=\sigma_{X/n}^2=\frac{1}{n^2}\cdot\sigma_y^2=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}$

يتم حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة $\hat{p}$ حسب نوع السحب إلى:

- مجتمع محدود و سحب بدون إرجاع: $\sigma_{\hat{p}}=\sqrt{\frac{p\times q}{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
- مجتمع غير محدود و سحب بالإرجاع: $\sigma_{\hat{p}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$

وتعطى القيمة المعيارية بالعلاقة التالية: $Z=\frac{\hat{P}-\overline{p}}{\sigma}$

2. طبيعة توزيع المعاينة للنسب

أساسي : نظرية رقم (7.2): توزيع المعاينة للنسب تتبع التوزيع الطبيعي

- إذا أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي يخضع للتوزيع الثنائي (بيرنولي) أي ذي الحدين B (X,n,P . وكانت نسبة النجاح المتوفرة من العينة هي $\hat{p}$ حيث $\hat{P}=\frac{X}{n}$ فإن توزيع هذه المتغيرة يقترب للتوزيع الطبيعي الذي وسطه $E(\hat{P})=\mu_P=P$ وتباينه $V(\hat{P})=\sigma_p^2=\frac{pq}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$ كلما كان n>30 ومنه يمكننا استخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري بالاستخدام Z.

*في حالة العينات صغيرة الحجم نستخدم التوزيع كي تربيع.

مثال : رقم (8.2):

إذا كان احتمال نجاح طالب في مسابقة ما هو 0.6 ، سحبت عينة عشوائية حجمها 64 طالب، أوجد احتمال أن يكون: $P(0,5\leqslant\hat{p}\leqslant0,7)$

الحل:

$$n=64,\quad E[\hat{P}]=0,6,\quad P(0,5\leqslant\hat{p}\leqslant0,7)=(\frac{0,5-0,6}{\sqrt{\frac{0,6\times0,4}{64}}}\leqslant Z\leqslant\frac{0,7-0,6}{\sqrt{\frac{0,6\times0,4}{64}}})=P(-1,63\leqslant Z\leqslant1,63)$$

$$\Rightarrow P(0,5\leqslant\hat{p}\leqslant0,7)=0,4484*2=0,9868$$

ت. توزيع المعاينة للفروق و المجاميع

يعطى توزيع الفرق بين وسطين بالحالات التالية:

1. توزيع المعاينة للفروق و المجاميع لمتوسطي عينتين

إذا كان $\bar{X}_1$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع N_1 موزعا طبيعيا متوسطه الحسابي μ_1 إنحرافه المعياري σ_1 وكان $\bar{X}_2$ المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع N_2 موزعا طبيعيا متوسطه الحسابي μ_2 انحرافه المعياري σ_2. و كانت العينتان مستقلتان فإن المجموع الجبري (أو الفرق) لمتوسط العينتين يخضع لتوزيع المعاينة . متوسطه $E(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)=\mu_1 \pm \mu_2$

و انحرافه المعياري لمجتمع غير منته أو في حال السحب بالإرجاع بـ: $\sigma_{(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

انحرافه المعياري لمجتمع لمجتمع منته أو السحب بدون إرجاع. $\sigma_{(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$

أساسي : نظرية رقم(8.2):

يؤول توزيع المعاينة للمجموع الجبري (أو الفرق) لمتوسط عينتين لمجتمعيين للتوزيع الطبيعي $(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 \mp \mu_2 \circ \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ في حالات التالية:

- توزيع المجتمعان طبيعيان والانحراف المعياري لمجتمعاتهما معروفة؛
- توزيع المجتمعان مجهولان، و الانحراف المعياري للمجتمعان معروف و حجم العينة كبير n>30؛

و بالتالي فإن القيمة المعيارية هي $Z=\frac{(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2}}$ حيث $\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- توزيع المجتمعان طبيعيان والانحراف المعياري لمجتمعاتهما غير معروفة (سنستخدم تباين العينتان المقدر غير المتحيز)و حجم عيناتهما n>30

$$\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 \mp \mu_2 \circ \frac{\grave{S}_1^2}{n_1}+\frac{\grave{S}_2^2}{n_2}\right)$$

- أما إذا كان التوزيع للمجتمعان طبيعيان و الانحراف غير معروف وحجم العينتين $n<30$ فأن التوزيع يقترب إلى

توزيع ستودنت بدرجة حرية(n_1+n_2-2) بشرط أن يكون تباين المجتمعات متساوية و هو كما يلي:

$$T=\frac{(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}}\times\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

او

$$T=\frac{(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\sum(X_{i1}-\bar{X}_1)+\sum(X_{i2}-\bar{X}_2)}}\times\frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$T=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim T(f) \quad \text{و} \quad f=\frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$$

مثال (9.2) :

إذا كان متوسط العمر الإنتاجي لعينات من مصابيح كهربائية منتجة في المصنع A $\mu_1=1440h$ وانحرافها المعياري هو $\sigma_1 = 220h$، ساعة اشتغال بينما متوسط العمر الإنتاجي للمصابيح في المصنع B هي $\mu_2 = 1220h$ بانحراف معياري $\sigma_2 = 110h$

الجواب: لدينا

$$A:\begin{cases}\mu_1=1440\\ \sigma_1=220\end{cases} \quad \text{و} \quad B:\begin{cases}\mu_2=1220\\ \sigma_2=110\end{cases} \quad \text{و} \quad n_1=n_2=120$$

$$\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{220^2}{220}+\frac{110^2}{220}}=16.58$$

المتغير المعياري للفرق بين وسطين هو :

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(1440-1220)}{16.58}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-220}{16.58}$$

– أولا: الفرق 150 ساعة : $Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-220}{16.58}=\frac{150-220}{16.58}=\frac{30}{16.58}=1.81$

فتكون مساحة الاحتمال المطلوبة على يمين الوسط هي:

$$P(\bar{X}<150)=P(Z<1.81)=0.4649$$

– ثانيا: الفرق 200 ساعة : $Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-220}{16.58}=\frac{200-220}{16.58}=\frac{-20}{16.58}=-1.21$

فتكون مساحة الاحتمال المطلوبة على يسار الوسط هي :

$$P(\bar{X}<200)=P(Z<-1.21)=0.3869$$

تمارين محلولة

التمرين 1: معمل ينتج 700كلغ من المعكرونة كمعدل يومي ، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 40 يوما، فبلغ وسطها الحسابي 740 كلغ بانحراف معياري 40كلغ. معمل أخر ينتج 500 كلغ كمعدل يومي ، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 35 يوما فبلغ وسطها الحسابي 480 كلغ بانحراف معياري 20كلغ. أ/ فما هو التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين ، ثم أحسب الاحتمال التالي:($p(180<\bar{x}_1-\bar{x}_2<210$)

الحل/

لدينا من المسألة $S_1^2 = 1600$ و $S_2^2 = 400$ و حيث أن $n_1 = 40$ ، $n_2 = 35$ وكليهما أكبر من 30 إذن يكون توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(700-500, \frac{1600}{40} + \frac{400}{35})$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(200, 51.43)$$

وبالتالي

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 200}{\sqrt{51.43}} \sim N(0,1)$$

لذلك يكون الاحتمال المطلوب هو

$$P(180 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 210) = P\left(\frac{180-200}{\sqrt{51.43}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 200}{\sqrt{51.43}} < \frac{210-200}{\sqrt{51.43}}\right)$$

$$= P(-2.79 < Z < 1.39) = P(Z < 1.39) - P(Z < -2.79)$$

$$= 0.9177 - 0.0029 = 0.9148$$

ب/ بفرض أن حجم العينة الأولى 20 يوما بانحراف معياري 30 كلغ و حجم العينة الثانية 18 يوما بانحراف معياري 25 كلغ و بفرض أن تجانس تبايني المجتمعين أوجد أن($P(\bar{X}_1-\bar{X}_2>215$

الحل/

حيث أن $n_1 = 20$ ، $n_2 = 18$ وكليهما أصغر من 30 إذن توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو :

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim t(20 + 18 - 2)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim t(36)$$

ويكون تباين توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو

$$S_p^2 = \frac{(20-1)30^2 + (18-1)25^2}{20 + 18 - 2} = 770.14$$

$$S^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 770.14\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{18}\right) = 81.29$$

وبالتالي

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 200}{\sqrt{81.29}} \sim t(36)$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 215) = P\left(T > \frac{215 - 200}{\sqrt{81.29}}\right) = P(T > 1.6637) = 0.05$$

فرنسية

التمرين الثاني: مجتمعين يتوزعان طبيعيا و تباينهما غير متساويين ، سحبت من المجتمع الأول عينة حجمها 40 بتباين 9 و عينة من المجتمع الثاني حجمها 15 و بتباين 16.أوجد توزيع الفرق بين وسطي العينتين ، ثم أحسب الاحتمال أن يكون الفرق أكبر من 53 بفرض أن المتوسط العينة الأولى و الثانية على التوالي هما 300 و 350.

حيث أن $n_1 = 40$ ، $n_2 = 15 < 30$ إذن توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو :

$$f = \frac{\left[\frac{9}{40} + \frac{16}{15}\right]^2}{\frac{\left(9/_{40}\right)^2}{39} + \frac{\left(16/_{15}\right)^2}{14}} = \frac{(1.292)^2}{0.0013 + 0.0813} = 20.209$$

فنأخذ عدد درجات الحرية 20

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim t(20)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim t(20)$$

ويكون تباين توزيع الفرق من وسطي العينتين هو

$$S^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} = \frac{9}{40} + \frac{16}{15} = 1.29$$

وبناءً عليه فإن

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (350 - 300)}{1.14} \sim t(20)$$

ويكون الاحتمال المطلوب

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 53) = P\left(T > \frac{53 - 50}{1.14}\right) = P(T > 2.63) = 0.01$$

لاحظ هنا أن القيمة 2.63 غير موجودة في جدول (2) الخاص بتوزيع t لذلك نأخذ أقرب قيمة منها وهي 2.528

أساسي : نظرية رقم (9.2) :

حالة المجتمعات التي تتبع توزيع ثنائي الحدين (النسب) و مجتمع غير منته أي حجم العينات $n \geq 30$ فإن مجموع أو فرق بين نسبتين $\widehat{P}_1 \pm \widehat{P}_2$ تخضع لتوزيع معاينة متوسطه $E_{\widehat{P}_1-\widehat{P}_2}=p_1-p_2$ و إنحرافه المعياري $\sigma_{\widehat{P}_1 \pm \widehat{P}_2}=\sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1}+\frac{p_2 \times q_2}{n_2}}$ ه القيمة المعيارية تعطى بالعلاقة التالية :

$$Z=\frac{(\widehat{P}_1 \pm \widehat{P}_2)-(p_1 \pm p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 \times q_1}{n_1}+\frac{p_2 \times q_2}{n_2}}}$$

مثال : رقم (10.2)

إذا كانت نسبة النجاح في مقياس الإحصاء في كلية العلوم الاقتصادية في جامعة ""أ"" تساوي 0،9 و كانت نسبة النجاح في نفس المقياس في نفس الكلية لكن بجامعة ""ب"" تساوي 0،8 ، سحبت عينة عشوائية حجمها 140 طالب من الجامعة ""أ"" و عينة ثانية حجمها 80 من الجامعة ""ب""، أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة ""أ"" عن نسبة النجاح في الجامعة ""ب"" بمقدار 0،15 على الأقل.

الحل:

ث. توزيع المعاينة لتباين العينة و للنسبة بين تباين عينتين

نحتاج في الكثير من الأحيان في تطبيقات الإحصاء الاستقرائي لمعرفة توزيع تباين العينة ، و سنعطي هذا التوزيع في حالة المعاينة من توزيع طبيعي

1. توزيع المعاينة للتباين

أساسي : نظرية رقم(10.2): توزيع المعاينة للتباين في حالة متوسط المجتمع غير معلوم

إذا كانت $X_1,X_2,X_3.....X_n$ قيم عينة مسحوبة من مجتمع الطبيعي، وكان تباين المجتمع معلوم σ^2 و متوسطه مجهول مع تباين العينة هو S^2 $\grave{S}^2=\frac{\sum(X_i-\bar{x})^2}{n-1}$ فإن المتغير العشوائي $\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع كاي تربيع ☐2 بدرجة حرية V=n-1

مثـال : رقم (11.2)

أخذ عينة عشوائية حجمها n=11 من التوزيع الطبيعي(μ,70) و كان S^2تباين العينة فأوجد احتمال أن تكون S^2 أقل من 82،5

الحل :

$$P(S^2 \leq 82{,}5) = P\left(\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)\times 82{,}5}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2 \leq \frac{10\times 82{,}5}{70}\right) = P(\chi^2 \leq 11{,}78) = 0{,}70$$

يتم استخراج قيمة كاي تربيع بدرجة حرية 11-1=10

أسـاسـي : نظرية رقم(11.2): توزيع المعاينة للتباين في حال كان متوسط المجتمع معلوم

إذا كانت $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ قيم عينة مسحوبة من مجتمع الطبيعي، وكان تباين المجتمع معلوم σ^2 و متوسطه مجهول مع تباين العينة هو S'^2 $\acute{S}^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum (X_i-\mu)^2$ فإن المتغير العشوائي $\frac{(n)\times S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع كاي تربيع ☐2 بدرجة حرية V=n-1

ملاحـظة : توزيع المعاينة للتباين في حال كان السحب بدون إرجاع

أذا كانت $\bar{X}$ متغير عشوائي تمثل مجتمع محدود و S^2تمثل تباين عينة نفاذية مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب كما يلي : $E(S^2) = \sigma^2 \times \left(\frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{N}{N-1}\right)$

تنبيـه : حالة خاصة

عندما تكون N كبيرا فإن(N/(N-1 تؤول إلى 1

2. توزيع المعاينة لنسبة بين تباين عينتين

للمقارنة بين تبايني مجتمعين فإننا نحتاج النسبة بين تبايني عينتين مأخوذتين من هذين المجتمعين و سنعطي توزيع هذه النسبة في حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين مستقلين.

أسـاسـي : نظرية رقم(12.2)

ليكن S^2_1 تباين عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي $(\mu_1،\sigma^2_1)$ و ليكن S'^2_2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع طبيعي $(\mu_2،\sigma^2_2)$ مستقل عن الأول فإن النسبة بين التباينين تتبعان توزيع فيشر ذي درجات حرية (n-1,n-2) حيث :

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \quad \text{أي} \quad F = \frac{\dfrac{(n_1-1)\times S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)\times S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)}$$

يتم استخراج قيمة فيشر بدرجة حريتين من الجدول

مثالـ : رقم (8.2)

مثال. لتكن لدينا عينتان حجميهما 8 و10 مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي 20 و36. ما احتمال أن يكون تباين الأولى أكبر من ضعف تباين الثانية؟

$$P(S_1^2 > 2S_2^2) = P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 2)$$

$$= P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}}\right) = P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{8}{7}\right)\frac{1}{20}}{\left(\frac{10}{9}\right)\frac{1}{36}}\right)$$

$$= P(F_{7,9} > 3.7)$$

من الجدول نجد $0.05 > P(F_{7,9} > 3.7) > 0.01$ وبالتحديد $P(F_{7,9} > 3.7) = 0.036$

* *
*

الجدول التالي يلخص ما ورد في النظريات السابقة عن توزيع المعاينة

إحصائية العينة	المجتمع	المعاينة	الخاصية
النسبة p'	مجتمع غير محدود	أيا كانت n	$E(p') = \mu_{p'} = p$; $\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$
		$n \geq 30$	$p' \approx N(p, \sigma_{p'})$
	مجتمع محدود	المعاينة تفاديه	لحساب $\sigma^2_{p'}$ نضرب في معامل الإرجاع.
الفرق بين إحصائيتين و مجموعهما $s_1 \pm s_2$	مجتمع ما	سحب بالإرجاع	$\mu_{S1 \pm S2} = \mu_{S1} \pm \mu_{S2}$ $\sigma^2_{S1 \pm S2} = \sigma^2_{S1} + \sigma^2_{S2}$
		n_1 و $n_2 \geq 30$	$\mu_{m1-m2} \approx N(0, 1)$
التباين S^2	مجتمع ما	سحب عينة بالإرجاع (أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود)	$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$ $E(S^2) \approx \sigma^2$ في حالة $n \geq 30$:
	مجتمع محدود	عينة تفادية	$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$ $N/(N-1)$ تؤول إلى 1 في حالة N كبير جدا
	مجتمع طبيعي	عينة حجمها n	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
F	مجتمعان طبيعيان تبايناهما σ^2_1 , σ^2_2	عينتين عشوائيتين حجميهما على التوالي n_1 , n_2	$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1-1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow F_{n_1-1;\, n_2-1}$

الفصل الثالث: التقدير

III

مفاهيم أساسية
طرق التقدير النقطي
معايير اختيار المقدر النقطي الجيد
التقدير بمجال(أو التقدير بفترة)

الأهداف الخاصة بالفصل الثالث

نهدف من خلال هذا الفصل إلى تحقيق جملة من الأهداف أهمها :

1. القدرة على فهم معايير المقدر الأمثل؛
2. القدرة على التقدير النقطي لمعلمات المجتمع انطلاقا من إحصاءات العينة ؛
3. القدرة على تطبيق الطرق الإحصائية في تقدير فترة الثقة لـ: متوسط مجتمع ، نسبة مجتمع ، تباين المجتمع ، الفرق بين مجتمعين ، النسبة بين مجتمعين انطلاقا من إحصاءات العينة ؛

يعرض هذا الفصل أسس الإحصاء الاستدلالي للتعرف على مؤشرات المجتمع باستخدام نتائج العينة. والاستدلال الإحصائي هام جدا،حيث أنه يصعب في معظم المواقف دراسة جميع مفردات المجتمع للتعرف على مؤشراته و معلماته،فمثلا أسلوب المسح الشامل يكلف الوقت،الجهد و المال. لهذا يتم استخدام طرق المعاينة لتمثيل المجتمع، حيث يتم تقدير معلمات المجتمع(المتوسط الحسابي μ، الانحراف المعياري σ، نسبة صفة معينة من المجتمع P انطلاقا من إحصاءات العينة $S \cdot \hat{P} \cdot \bar{X}$

ويعتبر التقدير أهم فروع الإحصاء الاستدلالي فهو يهدف إلى حساب ((تقريب)) إلى قيمة المعلمة في المجتمع باستخدام الإحصاء الذي تم حسابه من العينة .

آ. مفاهيم أساسية

تتم عملية التقدير من خلال اختيار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة بيانات تلك العينة ومن ثم حساب الإحصاءات المراد إجراءها وتعميم ذلك على معلمات المجتمع. إذن في نظرية التقدير، يفترض أن البيانات تكون عشوائية مع توزيع احتمالي معتمد على المَعلَمَات ذات الاهتمام.

تعريف : المعلمات

المعلمة (البارامتر): هي قيمة عددية تصف خاصية للمجتمع يتم الحصول عليها من خلال الحصر الشامل .مثل متوسط المجتمع وتباين المجتمع. و تتميز بأنها قيم ثابتة وليست متغيرات عشوائية، كما أنها لا تتبع توزيع احتمالي

تعريف : المقدرات

المقدر هو قيمة عددية تقدر معلمة المجتمع يتم الحصول عليها من خلال العينة ، مثل متوسط العينة وتباين العينة، تتميز بأنها قيم غير ثابتة ومتغيرة عشوائية كما أن لها توزيع احتمالي (توزيع معاينة).

تعريف : رقم (1.3): المقدر

هو قاعدة أو طريقة تستخدم فيها بيانات العينة لإيجاد قيمة رقمية لمعلمة المجتمع المجهولة و نرمز له بـ $\hat{\theta}$.

تعريف : رقم (2.3):التقدير

التقدير هو القيمة الرقمية التي نتحصل عليها نتيجة استخدام هذه الطريقة و نرمز له بـ θ.و تتم عملية التقدير بطريقتين هما :

- التقدير النقطي: وهو تقدير معلمات المجتمع θ من خلال بيانات العينة؛ويقصد به تمثيل معلمة المجتمع بقيمة ما ، نحسبها لعينة عشوائية باستخدام المقدر، فمثلا نقدر العمر الافتراضي للمصابيح المنتجة في مصنع ما بأن نقول أن العمر الافتراضي للمصباح يقدر بـ 200 ساعة.

لكن العينات المختلفة و التي لها نفس الحجم تعطينا تقديرات مختلفة ، الأمر الذي يترتب عليه وجود فرق بين المعلمة والتقدير و يسمى هذا الفرق بخطأ التقدير.

مما سبق نجد أن تقدير النقطة نادرا ما يساوي المعلمة التي نرغب في تقديرها ، لذلك فإننا نحدد فترة تحتوي على مجموع من القيم تتضمن فيها قيمة معلمة المجتمع.

- التقدير بفترة أو بمجال: و هو تحديد مدى لقيم معلمات المجتمع أي تحديد القيم العليا و السفلى ضمن فترة ثقة $(1-\alpha)$ ، ونلاحظ هنا أن التقدير بمجال يحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات. حيث احتمال وقوع المعلمة في هذه الفترة يسمى درجة الثقة، و مكمل هذه الفترة يسمى مستوى المعنوية و يرمز له بالرمز α. فمثلا إذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 46 و 34 سنة، ودرجة الثقة هي 95 % فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة مائة مرة، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%). و يكون مستوى الخطأ أو المعنوية 5%.

أي أن : مستوى المعنوية + مستوى الثقة =1

يمكن تعريف المجال أو الفترة كما يلي:

$P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha$ مع العلم أن $\hat{\theta}_2>\hat{\theta}_1$

و أما طول فترة الثقة فهي: $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$

ب. طرق التقدير النقطي

تعريف : التقدير النقطي

هو أي إحصاءه T(X) الذي يستعمل لتقدير معلمة غير معروفة θ، أو تقدير دالة لهذه المعلمة g(θ) ، و هو يمثل المقدر و الذي يرمز له بـ $\hat{\theta}$ و تمثل القيمة العددية له بالتقدير أي أن $\hat{\theta}$ =T(X)

و يمثل الإحصائه T(X) متغير عشوائي ، فالمقدر T(X) هو الآخر دالة ومتغير عشوائي .

, و هناك طرق عديدة لإيجاد مقدرات نقطية لمعالم المجتمع نذكر منها على سبيل المثال:

- طريقة العزوم MOM ؛
- طريقة الاحتمالية القصوى للتقدير MLE؛
- طريقة المربعات الصغرى MOLSE
- طريقة أصغر كاي تربيع
- طريقة أقل المسافات MD
- طرق البيز.

سنعتمد في هذا الفصل على الطريقتين MOMو MLE

1. طريقة العزوم Method of Moments

أساسي : النظرية رقم (1.3)

تعتبر هذه الطريقة من أقدم الطرق في التقدير، وهي تعود إلى العالم الإحصائي Pafnuty Chebyshev سنة 1887 و أثبتت الفكرة بعد ظهور نظرية النهاية المركزية لبيرسون سنة 1894.

فإذا كانت لدينا k من المعلمات المجهولة ، $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$، تتبع التوزيع $f(x;\theta)$ للمتغير العشوائي X ، لنفترض أنه يمكن التعبير عن العزوم الأولى M لـ k للتوزيع المجتمع كالدالة من K المعلمات بهذا الشكل θ_k:

$$M_1 \equiv E(X) = f_1(\theta_1 \theta_1, \ldots, \theta_k)$$
$$M_2 \equiv E(X^2) = f_2(\theta_1 \theta_2, \ldots, \theta_k)$$
$$\vdots$$
$$M_k \equiv E(X^k) = f_k(\theta_1 \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

تم نفترض حجم عينة n فتكون عزوم العينة m لقيم كما يلي : $x_1,x_2,\ldots x_n$ و $j=1,2,\ldots,k$ كما يلي :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^j$$

نقوم بالأخير بالمساواة بين العزم الرياضي للمجتمع Mمع ما يقابلها من مقدرات العزم الإحصائي للعينة m و بذلك نحصل على k من المعادلات وبحل هذه المعادلات نحصل على المقدرات:

$$\hat{m}_1 = f_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$$
$$\hat{m}_2 = f_2(\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$$
$$\vdots$$
$$\hat{m}_k = f_k(\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$$

ومنه يكون العزم من الدرجة k لــ M هو تقديرلــ m_j، حيث تمثل $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ حل المعادلات طريقة التقدير بالعزوم ، $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$، إن وجدت.

نصيحة

1. إذا كان التوزيع ذو معلمة واحدة نستخدم المعادلة حيث: $M_1 = m_1$

$$M_1 = E(X) \qquad \hat{m}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

2. أذا كان التوزيع ذو معلمتين نستخدم المعادلتين التاليتين : $M_2 = m_2$ $\quad M_1 = m_1$

$$M_1 = E(X) \quad \hat{m}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \qquad M_2 = E(X^2) \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

3. إذا كان التوزيع غير معروف فلإيجاد التوقع نستخدم التوزيع التالي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X) \cdot dX$$

مثال : رقم (1.3)

لتكن $x_1,x_2,\ldots x_n$ عينة عشوائية من توزيع برنولي(Ber(p . قدر p باستخدام MoM

الحل:

$$X \sim Ber(p) \qquad E(X) = p$$
$$M_1 = \hat{m}_1 \qquad M_1 = E(X) = p \qquad \hat{m}_1 = \bar{X}$$
$$\hat{p} = \bar{X}$$

مثال : رقم (2.3)

لتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ عينة عشوائية من توزيع أسي ($Exp(\lambda)$. قدر λ باستخدام Mom

الحل:

$$X \sim \exp(\lambda) \qquad E(X)=\lambda$$
$$M_1=\hat{m}_1 \qquad M_1=E(X)=\lambda \qquad \hat{m}_1=\bar{X}$$
$$\hat{\lambda}=\bar{X}$$

مثال : رقم (3.3)

باستخدام طريقة العزوم استخرج مقدر K من توزيع كي تربيع إذا كانت قيم X_I كما يلي: 4,7,8,2,9,5,3,1

الحل:

$$X \sim \chi_K^2 \qquad M_1=\hat{m}_1 \qquad M_1=E(X)=K \qquad \hat{m}_1=\bar{X}=\frac{\sum X_i}{n}=\frac{39}{8}=4,875 \Rightarrow \hat{K}=4,875$$

مثال : رقم (4.3)

باستخدام طريقة العزوم أوجد مقدر α من توزيع غير معروف دالة كثافته هي:

$$f(x,\alpha)=X\cdot\alpha X^{\alpha-1} \qquad 0<X<1$$

الحل:

$$M_1=m_1$$
$$M_1=E(X)=\int_0^1 X\cdot\alpha X^{\alpha-1}\cdot dX=\alpha\cdot\int_0^1 \frac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{\alpha}{\alpha+1}$$
$$\hat{m}_1=\bar{X}$$
$$\frac{\alpha}{\alpha+1}=\bar{X}\Rightarrow\alpha=\bar{X}\cdot\alpha+\bar{X}$$
$$\alpha(1-\bar{X})=\bar{X}\Rightarrow\hat{\alpha}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

مثال : رقم (5.3)

لتكن عينة عشوائية $x_1,x_2,\ldots,x_n$ للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma)^2$ بطريقة العزوم أوجد مقدر المعلمات μ,σ^2

الحل:

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \qquad E(X)=\mu \qquad Var(X)=\sigma^2$$
$$M_1=\hat{m}_1 \qquad M_1=E(X)=\mu \qquad \hat{m}_1=\bar{X}\Rightarrow\hat{m}_1=\bar{X}$$
$$M_2=\hat{m}_2 \qquad M_2=E(X^2) \qquad Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$M_2=Var(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$$
$$\hat{m}_2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2\Rightarrow\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2$$

مثال : رقم (6.3)

لتكن عينة عشوائية $x_1,x_2,\ldots,x_n$ للتوزيع ذو الحدين $Bin(n,p)$ بطريقة العزوم أوجد مقدر المعلمات n و p

$$X \sim Bin(n, P) \qquad E(X)=np \qquad Var(X)=npq=np(1-p)$$

$$M_1=\hat{m}_1 \qquad M_1=E(X)=\hat{n}\,\hat{p}=\bar{X}$$

$$M_2=\hat{m}_2 \qquad M_2=E(X^2)=Var(X)+[E(X)]^2=np(1-p)+(np)^2=np[1-p+np]$$

$$m_2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad \hat{p}=\frac{\bar{X}}{\hat{n}} \Rightarrow \frac{\hat{n}\cdot\bar{X}}{\hat{n}}[1-\frac{\bar{X}}{\hat{n}}+\hat{n}\frac{\bar{X}}{\hat{n}}]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Rightarrow \bar{X}\cdot[1-\frac{\bar{X}}{\hat{n}}+\bar{X}]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$1-\frac{\bar{X}}{\hat{n}}+\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}} \Rightarrow -\frac{\bar{X}}{\hat{n}}=-1-\bar{X}+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}} \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\hat{n}}=1+\bar{X}-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}} \Rightarrow \hat{n}=\frac{\bar{X}}{1+n\bar{X}+\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}}}$$

$$\hat{p}=\frac{\bar{X}}{\hat{n}}=\frac{\bar{X}}{\frac{\bar{X}}{1+n\bar{X}-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}}}}=1+\bar{X}-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}}$$

2. طريقة الاحتمالية القصوى للمقدر Method of Maximum likelihood estimator

أساسـي : نظرية رقم:(2.3)

لتكن $x_1, x_2, \ldots x_n$ عينة عشوائية التي تعتمد على واحد أو أكثر من المعلمات غير المعروفة $\theta_1\theta_2\ldots\ldots\theta_m$ مع دالة الكثافة (أو الكتلة) الاحتمالية $f(X_1, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m)$ ، لنفترض أن $\theta_1\theta_2\ldots\ldots\theta_m$ محصور لمساحة معلمة معينة Ω. ومنه تكون دالة الاحتمال المشترك(دالة الترجيح (likelihood) على الشكل التالي :

$$L(\theta_1, \theta_1, \ldots \theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1, \theta_1, \ldots \theta_m)$$

, ومن أجل تعظيم المعادلة نقوم بحساب لوغاريتمي لكلا الطرفين بهذا الشكل : $\ln(L(\theta_1, \theta_1, \ldots \theta_m))=\ln(\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1, \theta_1, \ldots \theta_m))$ تم نقوم بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة لتحديد القيمة القصوى للمقدر $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta}$

ملاحظة

تعتمد طريقة(MLE) لتقدير معلمات من خلال تعظيم دالة الاحتمالية (دالة الترجيح (likelihood)، إذا كانت دالة الاحتمال قابلة للتفاضل ، نقوم بالاشتقاق لتحديد القيمة القصوى.حيث يمكن التحقق من الحصول على الحد الأقصى. من خلال حساب المشتق الثاني الذي يكون نتيجته سلبية.

طريقة : مسلمات

$$\text{حاصل ضرب} = L(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=f(X_1,\theta)\cdot f(X_2,\theta)\dots f(X_n,\theta)$$

$$\prod_{i=1}^{n} c=c^n,\quad \prod_{i=1}^{n} e^{\text{متغير}}=e^{\sum \text{متغير}},\quad \prod_{i=1}^{n} e^a=e^{na}$$

$$\sum m=nm \quad ,\sum n=n^2,\quad \prod_{i=1}^{n} a^x=a^{\sum x}$$

$$\ln(0)=-\infty \quad ,\ln(\infty)=\infty,\quad \ln(1)=0$$

$$e^{-\infty}=0,\quad e^{\infty}=\infty \quad ,e^0=1$$

$$\ln(a)^B=B\ln(a),\quad \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\quad ,\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$$

$$\ln(e^{-a})=-a \quad ,\prod_{i=1}^{n} X^a=(X_1,X_2,X_3\dots X_n)^a=X_1^a,X_2^a,X_3^a\dots X_n^a$$

مثال : رقم (7.3)

لتكن دالة الكثافة معرفة على الشكل التالي : $f(X)=\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^X}{X!}$ أوجد تقدير λ باستخدام MLE

الحل:

$$1/\qquad L(X,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^X}{X!}=\frac{\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\cdot\prod_{i=1}^{n}\lambda^X}{\prod_{i=1}^{n} X!}=\frac{e^{-n\cdot\lambda}\cdot\lambda^{\sum X}}{\prod_{i=1}^{n} X!}$$

$$2/\qquad \ln(L(X,\lambda))=\ln(\frac{e^{-n\cdot\lambda}\cdot\lambda^{\sum X}}{\prod_{i=1}^{n} X!})=\ln(e^{-n\cdot\lambda})+\ln(\lambda^{\sum X})-\ln(\prod_{i=1}^{n} X!)$$

$$\ln(L(X,\lambda))=-n\lambda+\sum x\cdot\ln(\lambda)-\ln(\prod_{i=1}^{n} X!)$$

$$3/\qquad \frac{\partial\ln(L(X,\lambda))}{\partial\lambda}0\Rightarrow\frac{-n\lambda+\sum x\cdot\ln(\lambda)-\ln(\prod_{i=1}^{n} X!)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow -n+\sum x\cdot\frac{1}{\lambda}=0$$

$$\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{\sum X}{n}=\bar{X}$$

مثال : رقم (8.3)

لتكن $x_1,x_2,\dots x_n$ عينة عشوائية من توزيع برنولي(Ber(p . قدر p باستخدام MLE

$$X \sim Ber(p) \Rightarrow f(x) = p^X \cdot (1-p)^{1-X}$$

$$L(X,p) = \prod_{i=1}^{n} p^X \cdot (1-p)^{1-X} = \prod_{i=1}^{n} p^X \cdot \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{1-X} = p^{\sum X} \cdot (1-p)^{\sum 1-X}$$

$$\ln(L(X,p)) = \ln(p^{\sum X}) + \ln((1-p)^{\sum 1-X}) = \sum X \cdot \ln(p) + \sum (1-X) \cdot \ln(1-X)$$

$$\frac{\partial \ln(L(X,p))}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sum X \cdot \ln(p) + \sum (1-X) \cdot \ln(1-X)}{\partial p} = 0$$

$$\Rightarrow \sum X \cdot \frac{1}{p} + \sum (1-X) \cdot \frac{-1}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum X}{p} - \frac{\sum 1 - \sum X}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum X}{p} = \frac{n - \sum X}{1-p}$$

$$\Rightarrow \sum X - p \sum X = np - p \sum X \Rightarrow np = \sum X$$

$$\hat{p} = \frac{\sum X}{n} = \bar{X}$$

مثال : رقم (9.3)

لتكن عينة عشوائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma)^2$ بطريقة الاحتمالية القصوى أوجد مقدر المعلمات μ, σ^2 الحل:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$1/ \quad L(X, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} = [\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}]^n \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2}$$

$$L(X, \mu, \sigma^2) = (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^{-n} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2}$$

$$2/ \quad \ln(L(X, \mu, \sigma^2)) = \ln((\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^{-n} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2})$$

$$\ln(L(X, \mu, \sigma^2)) = -n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2$$

$$3.1/ \quad \frac{\partial L(X, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial -n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2}{\partial \mu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum -2(X-\mu) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu) = 0$$

$$\sum X - \sum \mu = 0 \Rightarrow \sum X - n\mu = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum X}{n} = \bar{X}$$

$$3.2/ \quad \frac{\partial L(X, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial -n \cdot \ln(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) + \frac{-1}{2\sigma^2} \cdot \sum (X-\mu)^2}{\partial \sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{\sigma} - \frac{-1}{2} \cdot \sum (X-\mu)^2 \cdot (-2\sigma^{-3}) = 0 \Rightarrow \frac{-n}{\sigma} + \frac{\sum (X-\mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\Rightarrow -n \cdot \sigma^2 + \sum (X-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X-\mu)^2}{n}$$

مثال : رقم (10.3)

لتكن عينة عشوائية $x_1,x_2,....x_n$ للتوزيع $f(X,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\cdot X^{\theta} & 0\leqslant X\leqslant 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$ و إذا كانت

Xi= 0.2,0.4;0.8,0.5,0.7,0.9,0.8,0.9، قدر المعلمة θ باستخدام MLE

الحل:

$$1/\quad L(X,\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\cdot X^{\theta}=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\cdot\prod_{i=1}^{n}X^{\theta}=(\theta+1)^{n}\cdot(X_1.X_2.X_3...X_n)^{\theta}$$

$$2/\quad \ln(L(X,\theta))=\ln((\theta+1)^{n}\cdot(X_1.X_2.X_3...X_n))$$

$$\Rightarrow n\cdot\ln((\theta+1))+\theta\cdot\ln(X_1)+\theta\cdot\ln(X_2)....+\theta\cdot\ln(X_n)$$

$$3/\quad \frac{\partial\ln(L(X,\theta))}{\partial\theta}=0\Rightarrow\frac{\partial\cdot\ln((\theta+1))+\theta\cdot\ln(X_1)+\theta\cdot\ln(X_2)....+\theta\cdot\ln(X_n)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{n}{\theta+1}+\ln(X_1)+\ln(X_2)...\ln(X_n)=0\Rightarrow\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)=0$$

$$\frac{n}{\theta+1}=-\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\Rightarrow n=-\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)}-1$$

$$\hat{\theta}=\frac{-8}{4.23}-1=0.8901$$

ب. معايير اختيار المقدر النقطي الجيد

تقدر معلمة المجتمع بمقدر معين ، و هو الإحصاء ، لذلك فهو متغير عشوائي تتعين قيمته من العينة تحت الدراسة، فمثلا إذا كان متوسط مجتمع μ، نأخذ عينة عشوائية حجمها n ونشاهد أفراد العينة و نحسب قيمة متوسطها الحسابي $\overline{X}$.

و إذا أخذنا عينة ثانية فربما نحصل على متوسط حسابي أخر ، و هكذا نتأكد أن المقدر متغير عشوائي ، وحتى نعتبر أن المقدر جيد فيجب أن يتمركز حول المعلمة، أي أنه قريب من المعلمة بمعدل .

حتى يصبح المقدر جيد لمعلمة المجتمع يجب أن تتوفر فيها مجموعة من الخواص وهي كما يلي:

حتى تصبح الإحصائية مقدر جيد لمعلمة المجتمع يجب أن تتوفر فيها مجموعة من الخواص وهي كما يلي:

1. عدم التحيز؛
2. الكفاءة ؛
3. الكفاية ؛
4. الاتساق.

1. خاصية عدم التحيز Unbiasedness

أساسي : نظرية رقم(3.3)

ليكن لدينا عينة عشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية هي: $f(x;\theta)$ ، بحيث أن المعلمة θمجهولة ، ولتكن $\hat{\theta}$ مقدر للمعلمة θ ، و يقال عن $\hat{\theta}$ أنها مقدر غير متحيز للمعلمة θ، إذا وفقط حققت الشرط التالي:

إذا كان متوسط توزيع العينات (التوقع الرياضي للمقدر) يساوي القيمة المعلمة المجتمع المراد تقديرها ، أي :

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

إذا كان التوقع الرياضي للمقدر لا يساوي المعلمة فإن المقدر متحيز.

نصيحة

الفارق بين التوقع الرياضي للمقدر والمعلمة يعطي مقدار التحيز baised.
الفارق بين قيمة المعلمة وقيمة المقدر يعطي قيمة الخطأ في التقدير.

ملاحظة

المتوسط الحسابي للعينة هو: $\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n}$

تباين العينة محسوب بمتوسط المجتمع هو: $\hat{\sigma}_n^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$ أو التباين المعدل المحسوب بمتوسط العينة وهو: $\grave{S}^2=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$ (و مقدر غير متحيز لتباين المجتمع يستخدم في حال كان حجم العينة أقل من 30.)

$$\sum FIXE\ NUMBER=n\cdot FIXE\ NUMBER$$
$$E(X_i-\mu)^2=Var(X)=\sigma^2$$
$$E(\bar{X}-\mu)^2=Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sum(X_i-\mu)=\sum X_i-\sum\mu=n\cdot\bar{X}-n\cdot\mu=n\cdot(\bar{X}-\mu)$$
$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

مثال : رقم (11.3)

لتكن لدينا عينة عشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ حجمها n تتبع التوزيع البيرنولي بالمعلمة p. بين أن $\bar{X}$ هو مقدر غير متحيز لـــ p

الحل :

$$X\sim Ber(p)$$
$$\hat{P}=\bar{X}$$
$$E(\bar{X})=E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot E\left(\sum X_i\right)=\frac{1}{n}\cdot E\left(\sum X_i\right)$$
$$\frac{1}{n}\cdot\sum E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\sum P=\frac{1}{n}\cdot nP=P$$
$$X\sim Ber(p)$$
$$\hat{P}=\bar{X}$$
$$E(\bar{X})=E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot E\left(\sum X_i\right)=\frac{1}{n}\cdot E\left(\sum X_i\right)$$
$$\frac{1}{n}\cdot\sum E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\sum P=\frac{1}{n}\cdot nP=P$$

ومنه $\bar{X}$ مقدر غير متحيز لـ P

مثال : رقم (12.3)

$\hat{\theta}_n=\frac{T(T-1)}{n(n-1)}$ هو مقدر غير متحيز لـــ θ^2 عندما $T=X_1+X_2+X_3+\ldots\ldots X_n$

$$X_i \sim Ber(\theta) \Rightarrow \sum X_i \sim Bin(n,\theta)$$ ذو الحدين
$$E(T)=n\theta \qquad V(T)=n\theta(1-\theta)$$
$$E(\hat{\theta}_n)=E[\frac{T(T-1)}{n(n-1)}]=\frac{1}{n(n-1)}\cdot E[T^2-T]=\frac{1}{n(n-1)}\cdot[E(T^2)-E(T)]$$
$$Var(T)=E(T^2)-[E(T)]^2 \Rightarrow n\theta(1-\theta)=E(T^2)-[n\theta]^2 \Rightarrow E(T^2)=n\theta-n\theta^2+n^2\theta^2$$
$$E(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n(n-1)}\cdot[n\theta-n\theta-n\theta^2+n^2\theta^2]=\frac{1}{n(n-1)}\cdot[n(n-1)\cdot\theta^2]$$
$$E(\hat{\theta}_n)=\theta^2$$ مقدر غير متحيز

تنبيه : مقدر مقارب إلى عدم التحيز أو خاصية التقارب convergeance

في بعض الأحيان توقع الإحصائية المقدرة $\hat{\theta}$ غير مساوية لمعلمة المجتمع θ ـ فإذا ما اقتربت حجم العينة إلى ما لانهاية ووجدنا نهاية التوقع مساوية للمعلمة $\lim_{n\to+\infty} E(\hat{\theta})=\theta$ ، يمكن أن نقول أن الإحصائية تقترب إلى عدم التحيز,θ

مثال : رقم (13.3)

لتكن لدينا مقدر التباين متحيز $S_n^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$ للتباين المجتمع σ^2. اقترح تباين غير متحيز لتباين المجتمع مع العلم أن : $E(S^2)=\sigma^2\cdot[1-\frac{1}{n}]$

الحل:

$$E(S^2)=\sigma^2\cdot[1-\frac{1}{n}]$$

$$\lim_{n\to\infty} E(S^2)=\lim_{n\to\infty}\sigma^2\cdot[1-\frac{1}{n}]=\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2$$ لـ S^2 مقدر غير متحيز

2. المقدر ذو تشتت ضعيف :متوسط مربع الخطأ Mean Square Error

أساسي : نظرية رقم (4.3)

إذا كانت $\hat{\theta}$ مقدر للمعلمة غير معلومة θ، فمتوسط مربع الخطأ يمكن أن يعرف بالشكل التالي:

$$MSE(\hat{\theta})=E\cdot(\hat{\theta}-\theta)^2=E(\widehat{\theta^2}-2\theta\cdot\hat{\theta}+\theta^2)=E(\hat{\theta})^2-2\theta E(\hat{\theta})+\theta^2$$
$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})^2-[E(\hat{\theta})]^2+[E(\hat{\theta})]^2-2\theta E(\hat{\theta})+\theta^2$$ قانون متوسط مربع الخطأ
$$MSE(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})+(E(\hat{\theta})-\theta)^2$$
$$MSE(\hat{\theta})=Var(\hat{\theta})+[baised(\theta)]^2$$

في حال كانت المقدر $\hat{\theta}$ غير متحيز للمعلمة θفإن baised(θ)=0 ومنه $MSE(\hat{\theta}) = VAR(\hat{\theta})$

مثال : رقم (14.3)

لتكن لدينا عينة عشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μو تباينه σ^2
برهن أن المقدر $(n-1/n)\ S^2$ متحيز σ^2 ، و أوجد MSE الخاص به.

الحل:

$$E\left(\frac{n-1}{n}\cdot S^2\right)=\frac{n-1}{n}\cdot E\left(S^2\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2\neq\sigma^2$$

$$\ldots\frac{n-1}{n}\cdot S^2 \text{ هو متحيز } S^2\ldots$$

$$baised\left(\sigma^2\right)=E\left(\frac{n-1}{n}\cdot S^2\right)-\sigma^2=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2-\sigma^2=\frac{-1}{n}\cdot\sigma^2$$

$$MSE\left(\frac{n-1}{n}\cdot S^2\right)=Var\left(\frac{n-1}{n}\cdot S^2\right)+\left[baised\left(\sigma^2\right)\right]^2=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot Var\left(S^2\right)+\left[\frac{-1}{n}\cdot\sigma^2\right]^2$$

$$\Rightarrow\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot 2\frac{\sigma^4}{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^4=\frac{2n-1}{n^2}\cdot\sigma^4$$

3. خاصية الاتساق Consistency

أساسي : نظرية رقم (5.3)

المقدر المتسق هو المقدر الذي تقترب قيمته من المعلمة التي يقدرها كلما كبر حجم العينة.
وهو الذي يقل تباينه وخطأه المعياري كلما كبر حجم العينة.

أي أن قيمة المقدر تبدأ بالثبات عند القيمة الحقيقية (المعلمة) بزيادة حجم العينة. قيمة المقدر تؤول لقيمة المعلمة بتزايد حجم العينة.

ليكن لدينا عينة عشوائية X_n ، ... ،X_2،X_1 من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية هي: $f(x;\theta)$ ، بحيث أن المعلمة θ مجهولة ، ولتكن $\hat{\theta}$ مقدر للمعلمة θ ، و يقال عن $\hat{\theta}$ أنه مقدر متسق للمعلمة θ، إذا كان توزيعه يميل إلى التمركز حول القيمة الحقيقية للمعلمة θ، عندما يزداد الحجم العينة n إلى اللانهاية ، أي $\lim_{n\to+\infty}P\left(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon\right)=0$ مع العلم أن $\varepsilon>0$ ،

هذا الشرط يعني على وجه الخصوص أن:

$$\lim_{n\to+\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty}P\left(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon\right)=0$$

ملاحظة

هذا النوع من الاتساق يسمى بالتقارب الاحتمالي أي يتقارب المتوسط التجريبي لسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتشابهة والقابلة للتكامل بشكل شبه مؤكد مع متوسطها الرياضي (أو توقعها).
تبعا لقانون الأعداد الكبيرة كولموقروف *Kolmogorov*

مثال : رقم (15.3)

لدينا عينة عشوائية X_n ، ... ،X_2،X_1من التوزيع دو الحدين (θ،1،) بين أن $\overline{X}$ مقدر متسق للـــ θ

$$X \sim Bin(1,\theta)$$ توزيع ذو حدين
$$E(X)=n\theta=(1)\cdot\theta=\theta$$
$$V(X)=n\theta\cdot(1-\theta)=\theta\cdot(1-\theta)$$
$$E(\bar{X})=E[\frac{\sum X_i}{n}]=\frac{1}{n}\cdot\sum E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\sum\theta=\frac{1}{n}\cdot n\theta$$
$E(\bar{X})=\theta$ الشرط الأول محقق
$$Var(\bar{X})=Var(\frac{\sum X_i}{n})=\frac{1}{n^2}\cdot\sum V(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum\sigma^2=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$
$\lim_{x\to\infty} Var(\bar{X})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$ الشرط الثاني تحقق

منه $\bar{X}$ مقدار متسق للـ θ

4. خاصية الكفاءة Eifficiency

أساسي : نظرية رقم (6.3)

ليكن لدينا $\widehat{\theta}_2$ و $\widehat{\theta}_1$ مقدرين للمعلمة θ ، بحيث أنهما غير متحيزين ، إذن المقدر الكفوء هو المقدر ذو أصغر تباين

بالتالي حتى نحدد الكفاءة يجب أن نقارن ، فنقول أن المقدر الأول كفؤ إذا و فقط حقق الشرطين التاليين :

$$Var(\hat{\theta}_1)<Var(\hat{\theta}_2)$$
$$E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$$

و العكس صحيح .

مثال : رقم (16.3)

أوجد المقدر الكفوء بين المقدرين التاليين : $\widehat{\theta}_2=\bar{X}$ و $\widehat{\theta}_1=\frac{X_1+2X_2+3X_3}{6}$

الحل: نبحث أول عن عدم تحيز المقدران للمعلمة θ :

$$E(\widehat{\theta}_1)=E(\frac{X_1+2X_2+3X_3}{6})=\frac{E(X_1)+E(2X_2)+E(3X_3)}{6}=\frac{\theta+2\theta+3\theta}{6}=\frac{6\theta}{6}=\theta$$
$$E(\widehat{\theta}_2)=E(\bar{X})=E(\frac{\sum X_i}{n})=\frac{1}{n}\cdot\sum E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\sum\theta=\frac{1}{n}\cdot n\theta=\theta$$

تم نبحث عن أصغر تباين للمقدران :

$$Var(\widehat{\theta}_1)=Var[\frac{X_1+2X_2+3X_3}{6}]=\frac{V(X_1)+V(2X_2)+V(3X_3)}{V(6)}=\frac{V(X_1)+4V(X_2)+9V(X_3)}{36}$$
$$Var(\widehat{\theta}_1)=\frac{\sigma^2+4\sigma^2+9\sigma^2}{36}=\frac{14\cdot\sigma^2}{36}=\frac{7}{18}\cdot\sigma^2$$
$$Var(\widehat{\theta}_2)=V(\bar{X})=V[\frac{\sum X_i}{n}]=\frac{1}{n^2}\cdot V\cdot\sum X_i\mu=\frac{1}{n^2}\cdot\sum V(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum\sigma^2=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{3}\cdot\sigma^2$$

مع العلم أن n=3 لوجود ثلاث متغيرات نجد أن تباين المقدر الأول أكبر من تباين المقدر الثاني .
إذن المقدر الثاني هو المقدر الكفوء للمعلمة θ.

طريقة

هناك طرق أخرى لاستخراج كفاءة المقدر من خلال إيجاد مقدر غير متحيز للتباين الأدنى في كل من نظرية Rao- Blachwell؛ نظرية Lehman- scheffe ؛و نظرية كرامر-راو للحد الأدنى للتباين؛

أساسي : نظرية رقم (7.3): نظرية كرامر -راو للحد الأدنى Cramer-Rao Lower Bound

لتكن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز ل θ، إذن $\hat{\theta}$ يسمى مقدر كفوء لـ θ إذا تحقق الشرط التالي:

$$Var(\hat{\theta}) \geqslant \frac{1}{E[\frac{\partial \cdot \ln f(x,\theta)}{\partial \cdot \theta}]^2}$$

حتى يتحقق الشرط يجب تكون قيمة تباين المقدر أكبر أو يساوي من قيمة CRLB

مثال : رقم (17.3)

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي(N(0,θ بين أن $\hat{\theta}=\frac{\sum X_i}{n}$ إحصاءة كفاءة للمعلمة θ

حيث دالة كثافتها هي $X \sim N(0,\theta) \Rightarrow f(X,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\theta}}\cdot e^{\frac{-X^2}{2\cdot\theta}}$

الحل:

$$\ln f(X,\theta)=\ln(2\pi\theta)^{\frac{-1}{2}}+\frac{-X^2}{2\theta} \Rightarrow \frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\pi\theta}+\frac{X^2}{2\theta^2}=\frac{-1}{2\theta}+\frac{X^2}{2\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}=\frac{1}{2\theta^2}-\frac{X^2}{\theta^3}$$

$$E[\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}]^2=-E[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial\theta^2}]=-E[\frac{1}{2\theta^2}-\frac{X^2}{\theta^3}]$$

$$\Rightarrow -[\frac{1}{2\theta^2}-\frac{1}{\theta^3}E\cdot(X^2)]=-[\frac{1}{2\theta^2}-\frac{\theta}{\theta^3}]=\frac{-1+2}{2\theta^2}=\frac{1}{2\theta^2}$$

$$\because Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)-0, \quad Var(X)=\theta \Rightarrow E(X^2)=\theta \therefore$$

$$CRLB=\frac{1}{\frac{n\cdot 1}{2\theta^2}}=\frac{2\theta^2}{n}$$

$$X \sim N(0,\theta) \Rightarrow \frac{\sum X_i^2}{\theta}=\chi^2(n)$$

$$E[\frac{\sum X_i^2}{\theta}]=n, Var[\frac{\sum X_i^2}{\theta}]=2n \Rightarrow \frac{1}{\theta^2}Var\cdot(\sum X_i^2)=2n \Rightarrow [\frac{1}{\theta^2}Var\cdot(\sum X_i^2)]\cdot\theta^2$$

$$\because Var(\sum X_i^2)=2n\theta^2 \therefore$$

$$Var(\theta)=Var[\frac{\sum X_i^2}{n}]=\frac{1}{n^2}Var\cdot(\sum X_i^2)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum Var(X_i^2)=\frac{1}{n^2}\cdot 2n\theta^2$$

$$\because Var(\theta)=\frac{2\theta^2}{n} \therefore$$

$$CRLB=Var(\theta)$$

ومنه المقدر $\hat{\theta}$ هو مقدار كفوء للمعلمة θ

أساسي : نظرية رقم (8.3): نظرية راو بلاك ويل *Rao- Blachwell*

لتكن $\hat{\theta}$ مقدر غير متحيز لـ θ و T(X) إحصاءة كافية لـ θ، إذن سيوجد مقدر $\theta^* = E[\hat{\theta}/T(X)]$
بحيث يجب تحقيق شرطين هما:
المقدرة θ^* غير متحيزة للمعلمة θ أي: $E(\theta^*)=\theta$
التباين θ^* أقل تباين من تباين المقدرة $\hat{\theta}$ أي: $Var(\theta^*)<Var(\hat{\theta})$

طريقة : خواص مهمة

1/الدالة الشرطية غير المستقلة: $f(X/Y=y)=\dfrac{f(X,Y=y)}{f(y)}$

2/الدالة الشرطية المستقلة : $f(X,Y)=f(X)\cdot f(Y)$

3/التوقع الشرطي للدوال المنقطعة : $E(X/Y)=\sum X\cdot P(X/Y)$

4/التوقع الشرطي للدوال المستمرة: $E(X/Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} X\, f\cdot(X/Y)\cdot dx$

مثال : رقم (18.3)

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ من مجتمع ذو توزيع بيرنولي B(θ) ، مع العلم أن $\hat{\theta}=X_1$ مقدر غير متحيز لـ θ

والإحصائية $T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i$ هي إحصائية كافية للمعلمة θ، أوجد أفضل مقدر لـ θ باستخدام نظرية راو بلاك ويل R-B-Th

الحل: نقوم أولا باستخراج قيمة = θ^*

¿

$$\hat{\theta}=X_1 \text{ مقدر غير متحير } \Rightarrow E(X_1)=\theta$$

$$T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \theta \text{ إحصاءة شاملة لـ } T(X)$$

$$\Theta=E(\hat{\theta}/T(X))=E(X_i/T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{\forall \cdot X_1} X_1 \cdot P(X_1/T)$$

$$P(X_1/T(X)=\sum_{i=1}^{n}(X_i))=\frac{P(X_1/T(X))}{P(T(X))}=\frac{P(X_1)\cdot P(T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1)}{P(T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i)}$$

$$X_1 \sim Ber(\theta) \Rightarrow P(X_1)=\theta^{X_1} \cdot (1-\theta)^{1-X_1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,\theta) \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{n} X_i, n, \theta)=C^{n}_{T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1 \sim Bin(n-1,\theta) \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1, n-1, \theta)=C^{n-1}_{\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1} \cdot (1-\theta)^{n-1-(\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1)}$$

$$P(X_1/T)=\frac{\theta^{X_1} \cdot (1-\theta)^{1-X_1} \cdot C^{n-1}_{\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i-X_1} \cdot (1-\theta)^{n-1-\sum_{i=1}^{n} X_i+X_1}}{C^{n}_{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=T \text{ نرمز للمجموع}$$

$$P(X_1/T)=\frac{\theta^{X_1} \cdot (1-\theta) \cdot (1-\theta)^{-X_1} \cdot C^{n-1}_{T-X_1} \cdot \theta^{-X_1} \cdot \theta^{T} \cdot (1-\theta)^{n} \cdot (1-\theta)^{-1} \cdot (1-\theta)^{-T} \cdot (1-\theta)^{X_1}}{C^{n}_{T} \cdot \theta^{T} \cdot (1-\theta)^{n} \cdot (1-\theta)^{-T}}$$

نقوم بالاختصار و الاختزال

$$P(X_1/T)=\frac{C^{n-1}_{T-X_1}}{C^{n}_{T}}$$

$$\Theta=E(X_1/T)= \quad (\text{توزيع برنولي})$$

$$\sum_{X_1=0}^{1} X_1 \cdot P(X_1/T)=\sum_{X_1=0}^{1} X_1 \cdot \frac{C^{n-1}_{T-X_1}}{C^{n}_{T}}=0+\frac{C^{n-1}_{T-1}}{C^{n}_{T}}=\frac{C^{n-1}_{T-1}}{\frac{n}{T} \cdot C^{n-1}_{T-1}}=\frac{1}{\frac{n}{T}}=\frac{T}{n}$$

ثم نقوم بتطبيق الشرطين على المقدر كما يلي:

$$E[\Theta]=E[\frac{T}{n}]=\frac{1}{n} \cdot E[\sum X_i]=\frac{1}{n} \cdot \sum E[\sum X_i]=\frac{1}{n} \cdot \sum \theta=\frac{1}{n} \cdot n\theta$$

$$E[\Theta]=\theta$$

$$\Theta \text{ مقدر غير متحيز لـ } \theta$$

$$Var[\Theta]=Var[\frac{T}{n}]=Var[\frac{\sum X_i}{n}]=Var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\theta \cdot (1-\theta)}{n}$$

$$Var[\hat{\theta}]=Var(X_1)=\theta \cdot (1-\theta)$$

$$Var[\Theta] \leqslant Var[\hat{\theta}] \Rightarrow \theta \text{ أفضل مقدر لـ } \Theta$$

أساسي : نظرية رقم (9.3)

المقدر الكافي هو المقدر الذي امتص كل المعلومات المتوفرة في العينة عن المعلمة.

لتكن X_n ، ... ،X_1،X_2 عينة عشوائية من توزيع ذو دالة كثافة أو دالة كتلة هي: $f(x;\theta)$ ،

و لتكن $Y=U(X_1,X_2,\ldots..X_N)$ إحصاءة من دالة كثافة $g(y,\theta)$ معرفة كتالي:

$$L(X_1,X_2,X_3\ldots\ldots,X_n)=f(X_1,\theta)\cdot f(X_2,\theta)\ldots\ldots.f(X_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta)$$

إذن $Y=U(X_1,X_2,\ldots..X_N)$ هي احصاءة كفاية للمعلمة θ، إذا تحقق الشرط التالي:

$$\prod_{i=1}^{n}f(X_I,\theta)=g(Y,\theta)\cdot h(X_1,X_2,\ldots..,X_n)$$

نصيحة

- إذا كان المقدر كافي فلا يوجد مقدر آخر يمكنه أن يستخلص معلومات زيادة من العينة لتقدير المعلمة من هذا المقدر.
- متوسط العينة يستفيد من كل المعلومات المتوفرة في العينة لتقدير متوسط المجتمع. لذلك متوسط العينة مقدر كاف لمتوسط المجتمع.
- وكذلك تباين العينة يستفيد من كل المعلومات المتوفرة في العينة لتقدير تباين المجتمع. لذلك تباين العينة مقدر كاف لتباين المجتمع.

مثال : رقم (19.3):

لتكن X_n ، ... ،X_1،X_2 عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(0,\theta^2)$ بين أن الإحصائه $Y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ كافية

للمعلمة θ^2

الحل:

$$X\sim N(O,\theta^2)\Rightarrow f(0,\theta^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\theta}\cdot e^{\frac{(-x-0)^2}{2\theta^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}f(x,\theta^2)=\prod_{i=1}^{n}[\sqrt{2\pi}\cdot\theta]^{-1}\cdot\prod_{i=1}^{n}e^{\frac{(-x-0)^2}{2\theta^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}f(x,\theta^2)=[\sqrt{2\pi}\cdot\theta]^{-n}\cdot e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}X^2}{2\theta^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot e^{\frac{-y}{2\theta^2}}$$ ¿❑¿

$$\prod_{i=1}^{n}f(x,\theta^2)=\frac{e^{\frac{-y}{2\theta^2}}}{\theta^n}\cdot\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}=\frac{e^{\frac{-y}{2\theta^2}}}{\theta^n}\cdot\frac{X^0}{(\sqrt{2\pi})^n}=g(y,\theta)\cdot h(X_i)$$

$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ هي إحصاءة كافية

6. خاصية الكمال Completeness

أساسي : نظرية رقم (10.3):

لتكن X_n ، ... ،X_1،X_2 عينة عشوائية من توزيع ذو دالة كثافة أو دالة كتلة هي: $f(x;\theta)$ ، و لتكن $T(X)$ إحصاءة ويمكن أن نقول أن $T(X)$ تنتمي إلى عائلة الكمال في حال وجود دالة مستمرة $U(X)$ بحيث :

$$E[U(X)]=0\Rightarrow U(X)=0,\forall x$$

مثال : رقم (20.3):

لتكن X متغير عشوائي من التوزيع المنتظم(U(0,θ، دالة كثافته $f(x;\theta) = 1/\theta$، برهن أن دالة الكثافة للمتغير العشوائي X تنتمي إلى عائلة كاملة

الحل:

لتكن دالة(U(X مستمرةلـ X

$$E[U(X)]=0 \Rightarrow \int_0^{\theta} U(X)\cdot\frac{dX}{\theta}=0 \Rightarrow \frac{1}{\theta}\cdot\int_0^{\theta} U(X)\cdot dX=0$$

$\theta>0 \Rightarrow U(X)=0 \Rightarrow f(0,\theta)$ تنتمي إلى عائلة الكمال

7. تمارين محلولة حول التقدير النقطي الجيد

التمرين الأول:التقدير النقطي لمتوسط المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي

يتم أخذ العينة عشوائية من التوزيع الطبيعي . يتم سحب n من المتغيرات العشوائية المستقلة ... ،x_1،x_2 ، x_n تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين.

كمقدر للمتوسط الحسابي μ نستخدم متوسط العينة التالي:

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i \quad ، \quad \sum(X_i-\mu)=\sum X_i-\sum\mu=n\cdot\bar{X}-n\cdot\mu=n\cdot(\bar{X}-\mu)$$

1/ القيمة المتوقعة للمقدر $\bar{X}_n$ يساوي متوسط الحسابي μ، يمكن إثبات ذلك:

$$E[\bar{X}_i]=E[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i]$$

$$E[\bar{X}_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[\bar{X}_i]=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu$$

$$E[\bar{X}_i]=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$$

$$E[\bar{X}_i]=\mu$$

لذلك ، المقدر $\bar{X}_n$ غير متحيز.

2/ نقوم باستخراج تباين المقدر $\bar{X}_n$ و هو n/σ^2، يمكن برهنة ذلك بـــ:

$$Var[\bar{X}_n]=Var[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i]$$

$$Var[\bar{X}_n]=Var[\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i]$$

$$Var[\bar{X}_n]=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

$$Var[\bar{X}_n]=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sigma^2$$

$$Var[\bar{X}_n]=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه تباين المقدر يميل إلى الصفر عندما يكون حجم العينة كبير.

3/ توزيع المقدر $\bar{X}_n$ له توزيع طبيعي

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

4/ متوسط الخطأ التربيعي للمقدر هو كما يلي:

$$MSE(\bar{X}_{\bar{n}}) = Var[\bar{X}_n]$$

$$MSE(\bar{X}_{\bar{n}}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

5/ أما بالنسبة للاتساق فالمتوسط هو مقدر متسق لوجود تقارب كبير في الاحتمال مع المتوسط الحقيقي كما هو مبين في المعادلتين أدناه:

$$\lim_{n\to+\infty} Var(\bar{X}_i) = \lim_{n\to+\infty} (\frac{\sigma^2}{n}) \to 0 \text{ و } P\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$$

ملاحظة

بالنسبة للتقدير النقطي لمتوسط مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي فالمقدر هو نفسه مقدر المثال السابق وقيمته المتوقعة قريبة من المتوسط الحقيقي ، كما أن تباينه يؤول للصفر مع كبر حجم العينة ، أما التوزيع فكلما كان حجم العينة كبير فهو يقارب التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية، أما الاتساق فهو ثابت بشدة مع المتوسط الحقيقي.

التمرين الثاني:التقدير النقطي لتباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي

هنا توجد حالتين :

- التقدير النقطي لتباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه معلوم؛
- التقدير النقطي لتباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه غير معلوم.

التقدير النقطي لتباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه معلوم؛

تم أخذ العينة من التوزيع الطبيعي . يتم سحب n من المتغيرات العشوائية المستقلة x_n ، ... ،x_1،x_2تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط µ معلوم وتباين σ^2 مجهول.

نستخدم المقدر التالي:

$$\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

سنبحث عن جودة المقدر من خلال خواصه :

1/ فالقيمة المتوقعة للمقدر $\widehat{\sigma_n^2}$ تساوي التباين σ^2 حسب البرهان التالي:

$$E[\widehat{\sigma_n^2}] = E[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2]$$

$$E[\widehat{\sigma_n^2}] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2]$$

$$E[\widehat{\sigma_n^2}] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{-i=1}^{n} Var[X_I]$$

$$E[\widehat{\sigma_n^2}] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \sigma^2$$

$$E[\widehat{\sigma_n^2}] = \sigma^2$$

لذلك المقدر غير متحيز

2/ تباين المقدر $\widehat{\sigma_n^2}$ تساوي $2\sigma^4/n$ ، يمكن إثبات ذلك مع العلم أن $E[(X_i-\mu)^4]=3\cdot\sigma^4$ حيث:

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=Var[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot Var[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}Var[(X_i-\mu)^2]$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^4]-\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)^2]^2)$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}3\cdot\sigma^4-\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2)^2)$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}2\cdot\sigma^4)$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 2\cdot\sigma^4$$

$$Var[\widehat{\sigma_n^2}]=\frac{2\cdot\sigma^4}{n}$$

ومنه فإن تباين المقدر يميل إلى الصفر كلما كبر حجم العينة .

3/ المقدر $\widehat{\sigma_n^2}$ له توزيع قاما مع المعلمات n و σ^2 ،حيث يمكن كتابة المقدر كتالي:

$$\widehat{\sigma_n^2}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$$\widehat{\sigma_n^2}=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2$$

$$\widehat{\sigma_n^2}=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

$$\widehat{\sigma_n^2}=\frac{\sigma^2}{n}\cdot W$$

حيث تكون المتغيرات عبارة عن متغيرات عشوائية عادية قياسية Z_i مستقلة ، وكون مجموع مربعات n من المتغيرات العشوائية القياسية المستقلة ، تتبع التوزيع مربع كاي مع درجة الحرية n، في جداء متغير عشوائي σ^2/nمربع كاي بدرجات ، الحرية nومنه نحصل على توزيع قاما بمعلمات n و σ^2 .

4/ متوسط الخطأ التربيعي للمقدر هو :

$$MSE(\widehat{\sigma_n^2})=Var[\widehat{\sigma_n^2}]$$

$$MSE(\widehat{\sigma_n^2})=\frac{2\sigma^4}{n}$$

5/ أما بالنسبة لاتساق المقدر فيمكن اعتباره متسق بشكل ضعيف لأنه ذو نهاية محدودة

$$p\lim_{n\to\infty}\widehat{\sigma^2}=\sigma^2$$

التقدير النقطي لتباين مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه غير معلوم:

تم أخذ العينة من التوزيع الطبيعي . يتم سحب n من المتغيرات العشوائية المستقلة x_n ، ... ،x_1،x_2تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين.

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$$

نستخدم تقديرات التباين التالية :

$$S_n^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$$ تباين العينة غير المعدل متحيز

$$\grave{S}_n^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$$ تباين العينة المعدل غير متحيز

1.1/ القيمة المتوقعة للتباين غير المعدل هو :

$$E[S_n^2]=E[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2]$$

$$E[S_n^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu-(\bar{X}_n-\mu))^2]$$

$$E[S_n^2]=\frac{1}{n}\cdot E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+(\bar{X}_n-\mu)^2-2\cdot(X_i-\mu)\cdot(\bar{X}_n-\mu)]$$

$$E[S_n^2]=\frac{1}{n}\cdot E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}_n-\mu)^2-2\cdot(\bar{X}_n-\mu)\cdot[\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}\mu]]$$

$$E[S_n^2]=\frac{1}{n}\cdot E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}_n-\mu)^2-2\cdot(\bar{X}_n-\mu)\cdot[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\cdot n-n\cdot\mu]]$$

$$E[S_n^2]=\frac{1}{n}\cdot E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+n(\bar{X}_n-\mu)^2-2n\cdot(\bar{X}_n-\mu)\cdot(\bar{X}_n-\mu)]$$

$$E[S_n^2]=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2}{n}-2\cdot E(\bar{X}_n-\mu)^2+E(\bar{X}_n-\mu)^2$$

$$E[S_n^2]=\sigma^2-E(\bar{X}_n-\mu)^2=\sigma^2-Var(\bar{X})=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2\cdot[\frac{n-1}{n}]\neq\sigma^2$$

إن تباين العينة غير المعدل S_n^2 هو مقدر متحيز للتباين الحقيقي σ^2 وسبب التحيز هو أننا نستخدم متوسط العينة بدل متوسط المجتمع ,من أجل الحصول على مقدر غير متحيز للتباين σ^2 ، نحتاج إلى إجراء ما يسمى بتعديل درجات الحرية

1.2/ القيمة المتوقعة لتباين العينة المعدل S_n^2هو مقدر غير متحيز للتباين المجتمع، البرهان كما يلي:

$$E[\grave{s}_n^2]=E[\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2]$$

$$E[\grave{s}_n^2]=E[\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2]$$

$$E[\grave{s}_n^2]=\frac{n}{n-1}E[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2]$$

$$E[\grave{s}_n^2]=\frac{n}{n-1}E[S_n^2]$$

$$E[\grave{s}_n^2]=\frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\frac{n-1}{n}$$

$$E[\grave{s}_n^2]=\sigma^2$$

هكذا ، عندما يتم أيضًا تقدير متوسط μ ، نحتاج إلى القسمة على n-1 بدلاً من n للحصول على مقدر غير

ومنه عندما نستخدم الانحرافات التربيعية عن متوسط العينة بدلاً من الانحرافات التربيعية عن المتوسط الحقيقي ، فإننا نقلل من التباين الحقيقي للبيانات. لأن هذا الأخير دائما أكبر من الأول.

فعند القسمة على n-1 بدلاً من n نصحح هذا الانحياز تمامًا. و يسمى الرقم الذي نقسم عليه " n-1" بعدد درجات الحرية وهو يساوي عدد عناصر العينة (n) مطروحًا منه عدد المعلمات الأخرى المراد تقديرها (في حالتنا 1 ، المتوسط الحقيقي μ).

المؤشر الذي نحتاج بواسطته لمضاعفة المقدر المتحيز S_n^2 للحصول على المقدر غير المتحيز s_n^2 هو n/n-1.

2.1/ تباين تباين العينة غير المعدل هو : $Var[\grave{S}_n^2]=\frac{n-1}{n}*2\frac{\sigma^4}{n}$ برهانه كما يلي:

2.2/ تباين تباين العينة المعدل هو : $var[\grave{s}_n^2]=\frac{2\cdot\sigma^4}{n-1}$ برهانه كما يلي:

$$Var[\grave{s}_n^2]=Var[\frac{n}{n-1}\cdot S^2]=\frac{n^2}{(n-1)^2}\cdot Var[S^2]$$

$$Var[\grave{s}_n^2]=\frac{n^2}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot 2\cdot\frac{\sigma^4}{n}$$

$$Var[\grave{s}_n^2]=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

كلا المقدرين يقتربان إلى الصفر حين يتجه حجم العينة إلى ما لانهاية ، كما نلاحظ أن تباين العينة غير المعدل يحتوي على تباين أصغر من تباين العينة المعدل .

3/ تباين العينة المعدل و غير المعدل له توزيع قاما

4/ متوسط الخطأ التربيعي للمقدرين هما على التوالي كما يلي :

1.4/ متوسط الخطأ التربيعي لتباين العينة غير المعدل هو:

$$MSE(S^2)=VAR(S^2)+baised(S^2)=[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2\sigma^4}{n}]+[\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2-\sigma^2]^2$$

$$MSE(S^2)=\frac{2n-2}{n^2}\cdot\sigma^4+(\frac{(n-1-n)\cdot\sigma^2}{n})^2$$

$$MSE(S^2)=\frac{2n-1}{n^2}\cdot\sigma^4$$

2.4/ متوسط الخطأ التربيعي لتباين العينة المعدل هو :

$$MSE(\grave{s}^2)=Var(\grave{s}^2)+baised(\grave{s}^2)=Var(\grave{s}^2)+0=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

نلاحظ أن متوسط الخطأ التربيعي لتباين العينة غير المعدل أصغر من متوسط الخطأ التربيعي لتباين العينة المعدل.

5/ الاتساق لتباين العينة المعدلة : نلاحظ من خلال المعادلة أذناه أن المقدر متسق بشكل ثابت.

$$\lim_{n\to\infty} Var[\grave{s}_n^2]=\lim_{n\to\infty}(\frac{2\cdot\sigma^4}{n-1})=0$$

الاتساق لتباين العينة غير المعدل : متسق بشكل ضعيف لعدم تحقق الشرط الأول

$$\lim_{n\to\infty} Var[S_n^2]=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}*2\frac{\sigma^4}{n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})\cdot\lim_{n\to\infty}(2\frac{\sigma^4}{n})=1\cdot 0=0$$

ت. التقدير بمجال(أو التقدير بفترة)

مجال الثقة أو فترة الثقة عبارة عن((مدى))، يحتمل أن يقع داخله المعلمة المراد تقديرها، و هذا الاحتمال يسمى ((مستوى الثقة)) و يرمز له $(1-\alpha)$ 100% و لإنشاء فترة الثقة نستعمل نظرية الحد المركزي التي تستخدم لحساب احتمال أن تقع المعلمة على بعد معين من المقدر .

يسمح التقدير بفترة أو بمجال على عكس التقدير النقطي بوسيلة لتقييم و التحكم في الثبات، الثقة ودرجة الدقة في التقدير ، كما أنه يتوقف على درجة الثقة المطلوبة في التقدير و تتأثر جودة التقدير بصفة عامة بعدة عوامل نذكر منها:

- حجم العينة: فكلما كان حجم العينة كبيرا كان التقدير أكثر كفاءة؛ و يمكن تحديد حجم العينة من خلال وضع حد أعلى للخطأ المسموح به (هامش الخطأ هو $d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

  و منه يمثل حجم العينة $n=\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}*\sigma}{d}\right)^2$
- التباين داخل العينة:كلما كان صغيرا كان التقدير أكثر كفاءة؛
- نوع العينة: فالتقديرات المحسوبة من عينة عشوائية بسيطة أكفأ من التقديرات المحسوبة من الأنواع الأخرى للعينات؛
- درجة الثقة المطلوبة $(1-\alpha)$ 100% : فكلما كانت درجة الثقة أكبر كانت فترة الثقة أكبر ، إلا أن هذا لا يعد ميزة فهو لا يفيد من النواحي العلمية.

1. مجالات الثقة لمتوسط المجتمع

ليكن X متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ وتباينه 2 معلوم، ولتكن X_n ، ... ،X_1،X_2 عينة عشوائية لــ X ، المطلوب إيجاد مجال ثقة للعلمة μ ، يمكن إيجاد توزيع المعاينة $\bar{X}\rightarrow N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\Rightarrow\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\rightarrow N(0,1)$ الذي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري N (0,1) ضمن مستوى الثقة 100% $(1-\alpha)$ و نكتب :

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$
$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\bar{X}-\mu\leq+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$
$$P\left[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$

و منه مجال الثقة لمتوسط مجتمع من درجة الثقة $(1-\alpha)$ 100%لن يقل عن $\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و لن يزيد على $\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

,ومنه يمكن كتابة مجال الثقة كما يلي :

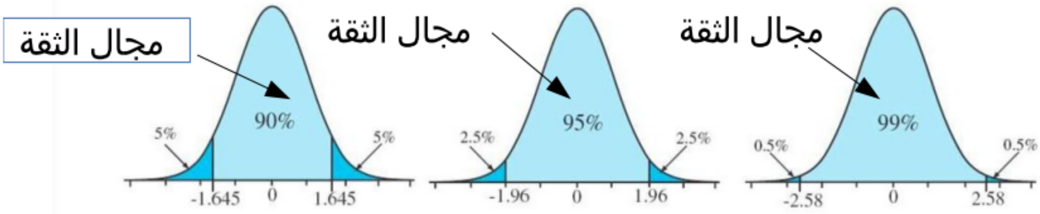
$\left[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ و يمثل المجال ب:متوسط العينة +/- هامش خطأ التقدير ، حيث يمثل هامش خطأ التقدير عند درجة التقدير 100% $(1-\alpha)$ بـ: $d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

و الجدول التالي يقدم القيم الحرجة للتوزيع المعياري التي تقابلها مجالات الثقة الأكثر استخداما:

مستوى الثقة α-1	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,50
مستوى المعنوية α	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5
$1-\frac{\alpha}{2}$	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,75

						معامل الثقة
0,674	1,282	1,645	1,96	2,326	2,576	$Z_{\alpha/2}$

$1-\alpha$	α	$z_{1-(\alpha/2)}$
.90	.10	1.645
.95	.05	1.960
.99	.01	2.576



فرنسية

نلاحظ من خلال الشكل أن مجال الثقة هي المساحة المحصورة بين القيم الحرجة للزاد .

ملاحظة

نلاحظ أن قيمة الحرجة لــ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ هي نفسها القيمة الحرجة $Z_{\alpha/2}$ و يعود السبب إلى التماثل حول الصفر للتوزيع الطبيعي المعياري.

ا) التقدير بمجال لمتوسط المجتمع باستخدام التوزيع الطبيعي

أساسي : نظرية رقم (11.3)

نستخدم التوزيع الطبيعي المعياري في تحديد مجالات الثقة للمتوسط في الحالات التالية :

• تباين المجتمع معلوم: إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم أو في حال المجتمع توزيعه مجهول(نظرية النهاية المركزية)) وتباينه معلوم و حجم العينة أكبر أو يساوي 30، حيث تكتب حدود مجال الثقة في حالتي السحب بالإرجاع (المجتمع غير محدود)وبدون إرجاع (المجتمع محدود) على التوالي كما يلي:

$$\hat{\mu}=\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

أو

$$\hat{\mu}=\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

• تباين المجتمع غير معلوم و توزيع المجتمع طبيعي وحجم العينة أكبر أو يساوي 30: فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه مجهول وحجم المجتمع $n\geq 30$ يؤول إلى التوزيع الطبيعي حيث نقوم باستبدال تباين المجتمع فـ:

- نستعمل نفس المعادلة السابقة مع تغيير تباين المجتمع بمقدر تباين المجتمع (في حال كان متوسط المجتمع معلوم) ($\widehat{\sigma_n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$)

- نستعمل تباين العينة غير المتحيز في حال كان متوسط المجتمع مجهول وكان السحب

يصبح التقدير كما يلي: $\hat{\mu}=\bar{x}\pm\frac{\grave{S}}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

مثال : رقم (21.3):

عينة عشوائية لمصنع ينتج المصابيح تقدر ب 100 و بمتوسط حسابي يقدر بـ 501،2 ساعة و على أفتراض أن تباين المجتمع معلوم بـ 16 ساعة ، أوجد مجال الثقة لمتوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع باحتمال 95%، استخرج هامش خطأ التقدير d. ما حجم العينة التي يجب أخذها للحصول على فترة ثقة 99% بهامش خطأ معياري لا يتجاوز 1،5؟

الحل: نقوم أولا باستخراج المعطيات و قيمة الحرجة للزاد كما هي موضحة في الشكل أذناه

$$\bar{X}=501{,}2\; n=100 \qquad \sigma^2=16\Rightarrow\sigma=4$$
$$\alpha=1-0{,}95=0{,}05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}025\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1{,}96$$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
+0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55966	.56360	.56749	.57142	.57535
+0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
+0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
+0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
+0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
+0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
+0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
+0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
+0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
+1	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
+1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
+1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
+1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91308	.91466	.91621	.91774
+1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
+1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
+1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
+1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
+1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
+1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
+2	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
+2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
+2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
+2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
+2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
+2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
+2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
+2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
+2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
+2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
+3	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
+3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
+3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
+3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
+3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
+3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
+3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
+3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
+3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
+3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997
+4	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998

هامش التقدير هو : $d=1{,}96\cdot\frac{4}{\sqrt{100}}=0{,}784$

المجال هو :

$$P[501{,}2-0{,}784\leq\mu\leq 501{,}2-0{,}784]=0{,}95$$
$$P[500{,}416\leq\mu\leq 501{,}984]=0{,}95$$

حجم العينة هو:

$$1-\alpha=0{,}01\Rightarrow\alpha=0{,}005\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}995\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2{,}59$$
$$n\geq\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}*\sigma}{d}\right)^2=n\geq\left(\frac{2{,}59*4}{1{,}5}\right)^2$$
$$n\geqslant 47{,}7$$

مثال : رقم (22.3):

عينة عشوائية حجمها n=25 ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري σ=4 فأعطت المتوسط الحسابي $\overline{X}$ =60 .أوجد مجال الثقة 99% لمتوسط المجتمع ؟

الحل:

$$1-\alpha=0,99\Rightarrow\alpha=0,01\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,005\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0,995\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2,576$$

$$\mu\in[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{0,995}\,,\,\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{0,995}]$$

$$\mu\in[60-2,576\cdot\frac{4}{5}\,,\,60+2,576\cdot\frac{4}{5}]$$

$$57,94\leq\mu\leq62,06$$

مثال : رقم (23.3):

أخذت عينة عشوائية من مجتمع متوسطه الحسابي و تباينه غير معلومين، سحبت عينـة حجمهـا n=64، فكانت قيمة المتوسـط الحسـابي للعينـة 7 = $\overline{X}$ و تبـاين العينـة $S^2=225$ غيـر المتحيـز $S'^2=225$. أوجـد مجال الثقة لمتوسط المجتمع باحتمال 90% ؟

الحل:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0,95}=1,645\,,\,n=64\,,\,S=15\,,\,\bar{X}=7$$

$$\mu\in[7-\frac{15}{8}\cdot1,645\,,\,7+\frac{15}{8}\cdot1,645]$$

$$\mu\in[3,92\quad,\quad10,08]$$

ب) التقدير بمجال لمتوسط المجتمع باستخدام توزيع ستودنت

أساسـي : نظرية رقم (12.3)

نستخدم توزيع ستيودنت T بدرجة حريةٍ n-1 في تقدير الفترة للمتوسط الحسابي للمجتمع باحتمال 100% $(1-\alpha)$ ، في حالات التالية :

-إذا كان حجم العينة المسحوبة صغيرا أقل مـن ثلاثـون ($n < 30$)مـن مجتمـع يتـوزع توزيعـا طبيعيـا ،والانحراف المعياري للمجتمع مجهول **σ** : و عليه يمكن كتابة حدود مجال الثقـة (حسـب نـوع تبـاين العينة غير متحيز أو متحيز) على التوالي:

غير متحيز $$P[\bar{X}-\frac{\grave{S}}{\sqrt{n}}\cdot t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)},\bar{X}+\frac{\grave{S}}{\sqrt{n}}\cdot t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}]=1-\alpha$$

أو

متحيز $$P[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}\cdot t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)},\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n+1}}\cdot t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}]=1-\alpha$$

مجتمع توزيعه مجهول و تباينه غير معلوم و حجم العينة n>30 نسـتعمل هنـا نظريـة النهايـة المركزيـة حيث أن متوسط العينة يقارب توزيع ستودنت ، وعليه نقوم بتقدير الانحـراف المعيـاري للمجتمـع بدلالـة الانحراف المعياري للعينة(شرط أن يكون تباين عينـة غيـر متحيـز) وحجـم العينـة أكبـر أو يسـاوي 30 . (نستعمل معادلة التقدير غير متحيز)

مثال : رقم (24.3):

إذا كان دخول مجموعة من المهاجرين في دولة أجنبية ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها 25فرد بمتوسط حسابي 72 فرد و الانحراف معياري غير متحيز قد بلغ 6 أفراد. أوجد مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع بمستوى ثقة 95 %

الحل:

$$1-\alpha=0{,}95 \Rightarrow \alpha=0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}025 \Rightarrow t_{(0{,}025,\,25-1)}=2{,}064\,,\quad \bar{X}=72\,,\quad \grave{S}=6,\quad n=25$$

$$\mu\in[72-\frac{6}{\sqrt{25}}\cdot 2{,}064 \quad , \quad 72+\frac{6}{\sqrt{25}}\cdot 2{,}064]$$

$$\mu\in[69{,}52 \quad , \quad 74{,}48]$$

مثال : رقم (25.3):

أخذت عينة عشوائية حجمها n=15 من مجتمع طبيعي فأعطت $\bar{X}$ =17,4 و انحراف غير متحيز 2,1 =' S. أوجد مجال الثقة لاحتمال 98% .

الحل:

$$1-\alpha=0{,}98 \Rightarrow \alpha=0{,}02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}01 \Rightarrow t_{(0{,}01,\,15-1)}=2{,}624,\quad \bar{X}=17{,}4 \quad S=2{,}1 \quad n=15$$

$$\mu\in[17{,}4-\frac{2{,}1}{3{,}87}\cdot 2{,}624 \quad , 17{,}4+\frac{2{,}1}{3{,}87}\cdot 2{,}624]$$

$$\mu\in[15{,}98 \quad , \quad 18{,}82]$$

مثال : رقم (26.3):

في مصنع السبائك الموجه لأحد أنواع الصواريخ ، و أخذت عينة من 20 قطعة لقياس قوتها، فوجد أن المتوسط الحسابي لها هو 37،8 و الانحراف المعياري لها (غير متحيز)هو 2،8. أوجد مجال الثقة لاحتمال 90% لمتوسط قوة السبيكة.

$$1-\alpha=0{,}90 \Rightarrow \alpha=0{,}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}05 \Rightarrow t_{(0{,}05,\,20-1)}=1{,}729,\quad \bar{X}=37{,}8 \quad \grave{S}=2{,}8 \quad n=20$$

الحل:

$$\mu\in[37{,}8-\frac{2{,}8}{4{,}47}\cdot 1{,}729 \quad , 37{,}8+\frac{2{,}8}{4{,}47}\cdot 1{,}729]$$

$$\mu\in[36{,}72 \quad , \quad 38{,}88]$$

تنبيه

في حال كان توزيع المجتمع مجهول ، و تباين غير معروف، و حجم العينة أقل من 30 يمكن استخدام نظرية عدم المساواة ل تشيبتشيف bienamye tchebyschev لتقدير بمجال ثقة لمتوسط مجتمع من خلال المعادلة التالية :

$$\forall\, k\,,\; p(|\bar{X}-\mu|<k_S)\leqslant 1-\frac{1}{K^2}$$

$$1-\alpha=1-\frac{1}{k^2} \Rightarrow k=\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

$$P[\bar{X}-\frac{k\cdot\grave{S}}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+\frac{k\cdot\grave{S}}{\sqrt{n}}]=1-\alpha$$

2. مجالات الثقة للفرق بين متوسطين

يمكننا استعمال الأسلوب السابق في بناء فترات الثقة للمتوسط لإيجاد فترات الثقة للفرق بين متوسطين ($\mu_1-\mu_2$) وذلك بالاستعانة بنظريات توزيع المعاينة للفرق بين وسطين في الحالات التالية:

أساسي : نظرية رقم (13.3):مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبع التوزيع الطبيعي وتباينهما معلوم

إذا كانت $x_1,x_2,....x_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ متوسطها الحسابي bar X_1 و كانت عينة ثانية عشوائية مستقلة عن التوزيع الأول لتكن $y_1,y_2,....y_n$ من التوزيع الطبيعي$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ متوسطها bar X_2 وكان تباين المجتمعين معلومين ، فأن مجال الثقة 100 % $(1-\alpha)$ للفرق بين الوسطين ($\mu_1-\mu_2$) يكتب كما يلي:

$$P[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leq+Z_{\frac{\alpha}{2}}]=1-\alpha$$

$$P[-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)\leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq-(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

أساسي : مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبع التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهولين و حجم العينتين كبير

في حال كان مجتمعي يتبعان التوزيع الطبيعي وتباينهما مجهول و حجم العينتين كبير ، فأن مجال الثقة 100% $(1-\alpha)$ للفرق بين الوسطين ($\mu_1-\mu_2$) يكتب كما يلي:

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\grave{S}_1^2}{n_1}+\frac{\grave{S}_2^2}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\grave{S}_1^2}{n_1}+\frac{\grave{S}_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

مثال : رقم (27.3):

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي تباينه 25 ، و عينة ثانية مستقلة عن الأولى حجمها 10 من مجتمع طبيعي تباينه 40 ، فإذا أعطت العينة الأولى متوسط حسابي مساوي لـ 32 و أعطت العينة الثانية متوسط حسابي مساوي لـ 47 . أوجد فترة ثقة الفرق بين المتوسطين ($\mu_1-\mu_2$)باحتمال 95% .

أوجد مجال ثقة الفرق بين المتوسطين ($\mu_1-\mu_2$)باحتمال 90% .

الحل: أ/ مجال ثقة الفرق بين المتوسطين ($\mu_1-\mu_2$)باحتمال 95% .

$$1-\alpha=0,95\Rightarrow\alpha=0,05,\quad Z_{0,975}=1,96,\quad(\bar{X}_1-\bar{X}_2)=32-47=-15$$

$$\sigma_{x_1+x_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}=2,60$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[-15-5,1\quad,\quad-15+5,1]=0,95$$

$$P[-20,1\quad,\quad-9,9]=0,95$$

مجال ثقة الفرق بين المتوسطين ($\mu_1-\mu_2$)باحتمال 90%

$$1-\alpha=0{,}90 \Rightarrow \alpha=0{,}1 \quad , Z_{0,95}=1{,}645 \quad , \quad (\bar{X}_2-\bar{X}_1)=47-32=15$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}=2{,}60$$

$$P[(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq \mu_2-\mu_1\leq (\bar{X}_2-\bar{X}_1)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[15-4{,}28 \quad , \quad 15+4{,}28]=0{,}90$$

$$P[10{,}72 \quad , \quad 19{,}28]=0{,}90$$

مثال : رقم (28.3):

إذا كانت نتائج امتحان الإحصاء الذي أجري لـ 50 طالبة و 75 طالبا هي على التوالي كما يلي:

$n_1=50,\ \sigma_1=6,\ \bar{x}_1=76$

$n_2=76,\ \sigma_2=8,\ \bar{x}_2=82$

أوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي الطالبات و الطلاب لهذا المجتمع باحتمال 96%.

الحل:

$$1-\alpha=0{,}96\Rightarrow\alpha=0{,}4 \quad , Z_{0,98}=2{,}06 \quad , \quad (\bar{X}_1-\bar{X}_2)=76-82=-6$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{36}{50}+\frac{64}{75}}=1{,}25$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[-6-2{,}06\cdot 1{,}25 \quad , \quad -6+2{,}575]=0{,}96$$

$$P[-7{,}575 \quad , \quad -3{,}425]=0{,}96$$

ب) مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتبع توزيع ستودنت

أساسي : نظرية رقم (14.3)

إذا كانت $x_1,x_2,\ldots.x_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي($\mu_1,\ \sigma_1^2$)N و كانت عينة ثانية عشوائية مستقلة عن التوزيع الأول لتكن $y_1,y_2,\ldots.y_n$ من التوزيع الطبيعي($\mu_2,\ \sigma_2^2$) N و كان تباين المجتمعين مجهولتين ومتساويتين،يعطى تباين الفرق غير متحيز S_C^2 بالعلاقة التالية :

$$S_C^2=\frac{(n_1-1)\cdot \grave{S}_1^2+(n_2-1)\cdot \grave{S}_2^2}{n_1+n_2-2}$$

أو $$S_C^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(\grave{X}_i-\bar{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}=t(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)$$

ومنه فالمتغير العشوائي أذناه يتبع قانون توزيع ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2

$$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(\grave{X}_i-\bar{X}_2)^2}}\times\frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

ومنه فمجال الثقة 100% $(1-\alpha)$ للفرق بين الوسطين ($\mu_1-\mu_2$) تؤول الى توزيع ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2 يكتب كما يلي:

بفرض أن: $P[-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\leq t\leq t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}]=1-\alpha$

$$P[-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\leq\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\leq t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}]=1-\alpha$$

$$P[-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)\leq t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq-(\mu_1-\mu_2)\leq-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

$$P[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2)}\cdot S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]=1-\alpha$$

ملاحظة

في حال عدم تساوي تباين العينتين يعطى درجة الحرية لتوزيع ستودنت بـ

المعادلة التالية:

$$f=\frac{[\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}]^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

مثال : رقم (29.3):

مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه مجهول نسحب عينة عشوائية حجمها 5 بمتوسط 36،8 و تبـاين 63،2 و عينة ثانية مستقلة عن الأولى من نفس المجتمع حجمها 7 بمتوسـط 31،1 و تبـاين 61،5 . أوجـد مجـال الثقة للفرق بينهما باحتمال 95%.

الحل:

$$n_1=5,\quad n_2=7,\quad n_1+n_2-2=10,\quad \bar{X}_1=36{,}8,\quad \bar{X}_2=31{,}1\quad ,S_1^2=63{,}2\quad S_2^2=61{,}1$$

$$1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}05\Rightarrow t_{(0{,}025\,,\,10)}=2{,}228,\qquad \bar{X}_1-\bar{X}_2=36{,}8-31{,}1=5{,}7$$

$$S_C^2=\frac{(5-1)\cdot63{,}2+(7-1)\cdot61{,}5}{10}=62{,}17$$

$$P[5{,}7-2{,}228\cdot\sqrt{62{,}17}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}\,,\,5{,}7+2{,}228\cdot\sqrt{62{,}17}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}]=0{,}95$$

$$P[-4{,}6\quad,\quad16{,}0]=0{,}95$$

مثال : رقم (30.3):

كانت نتائج مادة الإحصاء من قبل مدرسين A و B على الشكل التالي:

A: $\bar{X}_1=72,\ S_1=5,\ n_1=14$

B: $\bar{X}_2=75,\ S_2=6,\ N_2=12$

المطلوب : إيجاد مجال الثقة للفرق بين متوسطين باحتمال 98%

الحل:

$$n_1=14,\ \ n_2=12,\ \ n_1+n_2-2=24,\ \ \bar{X}_1=72,\ \ \bar{X}_2=75\ \ ,S_1^2=25\ \ S_2^2=36$$

$$1-\alpha=0{,}98\Rightarrow\alpha=0{,}02\Rightarrow t_{(0{,}001,\,24)}=2{,}485,\qquad \bar{X}_1-\bar{X}_2=72-75=-3$$

$$S_C^2=\frac{(14-1)\cdot25+(12-1)\cdot36}{24}=30{,}04$$

$$P\left[-3-2{,}485\cdot\sqrt{30{,}04}\cdot\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{12}}\quad,\quad -3+2{,}485\cdot\sqrt{30{,}04}\cdot\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{12}}\right]=0{,}95$$

$$P[-9{,}468\quad,\quad 3{,}468]=0{,}95$$

3. مجال الثقة لنسبة مجتمع

يستخدم مؤشر النسبة بصفة عامة في الأبحاث المتعلقة بقياس نسبة ظاهرة معينة ، كقياس نسبة المدخنين بين طلبة الجامعات، أو نسبة مشاهدة حصة معينة في التلفاز....الخ..

و تقدير النسبة في المجتمع هو الأخر يعتمد على نظرية الحد المركزي ، فتوزيع معاينة النسبة في العينة يمكن أن يقترب من التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينة n>50 ؛n(1-p)>20؛و np>20

حيث يتم تقدير النسبة بمجال بإيجاد تقدير بنقطة لنسبة النجاح P مستخرجة من مجتمع ثنائي الحدين (برنولي) ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمالها لإيجاد المجال بمستوى ثقة معين تحصر نسبة النجاح بداخلها .

أساسي : نظرية رقم (15.3)

إذا كان $\hat{P}=\frac{X}{n}$ نسبة نجاح قريبة من الصفر أو الواحد وتمثل نسبة المفردات ذات الصفة X في عينة عشوائية حجمها كبير (n>=50) فأن توزيع هذا المجتمع يقترب إلى التوزيع الطبيعي :

$$E(\hat{P})=\mu_{\hat{P}}=P\,,\sigma_{\hat{P}}^2,=\frac{pq}{n}=\frac{p\cdot(1-p)}{n},\qquad \hat{p}\sim N(P,\sigma_{\hat{P}}^2)$$

دالة التقدير هي

$$Z=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}}$$

و يمثل مجال الثقة لـ 100% $(1-\alpha)$ لنسبة نجاح P كما يلي:

ملاحظة : في حالة السحب بالإرجاع أو إذا كان المجتمع محدود و العينة نفادية

نستخدم الصيغة التالية:

$$p[\hat{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\leq P\leq\hat{P}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}]=1-\alpha$$

في معظم التطبيقات قيمة النسبة في المجتمع غير معروفة ، ومن أجل حل هذا المشكل يتم الأخذ بأحد الطرق التالية:

- تقدير النسبة في المجتمع انطلاقا من نسبة العينة $\hat{P}=\frac{X}{n}$

- تقدير نسبة المجتمع بقيمة 1/2 حيث أن الصيغة (p (1 - p تكون أقل من 1/4. لكن مجال الثقة العشوائي ليس دقيق.

حيث نحصل على المجال التالي : $p[\hat{P}-\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\leq P\leq\hat{P}+\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}]=1-\alpha$

- تقدير نسبة المجتمع من خلال البحث عن حلول المميز للمتغير العشوائي النسبي:

$$(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}<+Z_{1-\frac{\alpha}{2}})=(\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)^2}{n}}}<Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

$$(n+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})\cdot P^2-(2n\,\hat{p}+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})\cdot\hat{P}+n\,\hat{p}^2<0$$

$$\Delta=(2n\,\hat{p}+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})^2-4\times(n+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})\times n\,\hat{p}^2=4n\,Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\hat{p}(1-\hat{p})+Z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

الحل الأول لمعادلة المميز $\dfrac{(2n\,\hat{p}+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})-\sqrt{4n\,Z^2_{1-\alpha}\,\hat{p}(1-\hat{p})+Z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{2(n+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})}$

الحل الثاني لمعادلة المميز $\dfrac{(2n\,\hat{p}+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})+\sqrt{4n\,Z^2_{1-\alpha}\,\hat{p}(1-\hat{p})+Z^4_{1-\frac{\alpha}{2}}}}{2(n+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}})}$

$$[\frac{\hat{p}+\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}+\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n^2}}}{1+\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}};\frac{\hat{p}-\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}+\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4n^2}}}{1+\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}]$$

مثالل : رقم (31.3):

لدينا مجتمع من الطلاب الذين لديهم ضعف في البصر، أخدت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن عدد الطلاب الذين لديهم ضعف في البصر هم 15 طالب . أوجد تقدير بنقطة للنسبة في المجتمع P. و أوجد مجال الثقة للنسبة باحتمال 95%.

الحل:

$$1- \quad \hat{P}=\frac{X}{n}=\frac{15}{100}=0,15$$

$$2- \quad 1-\alpha=0,95 \Rightarrow \alpha=0,05 \Rightarrow 1-\frac{0,05}{2}=0,975 \Rightarrow Z_{1-\frac{0,05}{2}}=1,96$$

$$p[\hat{P}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}} \leq P \leq \hat{P}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{P}\cdot(1-\hat{P})}{n}}]=1-\alpha$$

$$p[0,15-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,15\cdot(0,85)}{100}} \leq P \leq 0,15+1,96\cdot\sqrt{\frac{0,15\cdot(0,85)}{100}}]=0,95$$

$$P[0,08 \quad , \quad 0,22]=0,95$$

مثالل : رقم (32.3):

عينة من مجتمع مؤلفة من 500 أسرة في مدينة ما ، فوجد أن 160 أسرة تمتلك سيارات ، أوجد نسبة مالكي السيارات في هذه المدينة باحتمال 90%

الحل:

$$\hat{P}=\frac{X}{n}=\frac{160}{500}=0,32$$

$$1-\alpha=0,90 \Rightarrow \alpha=0,10 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,95 \Rightarrow Z_{0,95}=1,645$$

$$P[0,32-1,645\cdot \sqrt{\frac{(0,32)\cdot(0,68)}{500}} \leq P \leq 0,32-1,645\cdot\sqrt{\frac{(0,32)\cdot(0,68)}{500}}]=0,90$$

$$P[0,29 \leq P \leq 0,35]=0,90$$

4. مجال الثقة للفرق بين نسبتين لمجموعتين طبيعيين

أسلسي : نظرية رقم (16.3)

إذا كانت عينة عشوائية X_1 تتبع التوزيع البيرنولي($B(N_1,P_1$ و حجمها أكبر أو يساوي 30 ، و عينة ثانية X_2 مستقلة عن الأولى($B(N_2,P_2$ حجمها أكبر أو يساوي 30 فإن

مثلل : رقم (33.3):

سجلت 80 حالة شفاء من فيروس كورونا في الموجة الأولى لها من بين 90 حالة دخلت المشفى أ و في المشفى ب سجلت 50 حالة شفاء من بين 70 حالة . أوجد مجال الثقة 90 % للفرق بين نسبتي الشفاء في المشفيين.

الحل:

$$n_1=90,\quad n_2=70,\quad 1-\alpha=0{,}90 \Rightarrow \alpha=0{,}10 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95 \Rightarrow Z_{0{,}95}=1{,}645$$

$$\hat{P}_1=\frac{x_1}{n_1}=\frac{80}{90}=0{,}89,\quad \hat{P}_2=\frac{x_2}{n_2}=\frac{50}{70}=0{,}71,\quad (\hat{P}_1-\hat{P}_2)=0{,}89-0{,}71=0{,}18$$

$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\sqrt{\frac{\hat{P}_1\cdot(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\cdot(1-\hat{P}_2)}{n_2}}=\sqrt{\frac{0{,}89\cdot(1-0{,}89)}{90}+\frac{0{,}71\cdot(1-0{,}71)}{70}}=0{,}063$$

$$P\left[(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\le(P_1-P_2)\le(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[(0{,}18)-1{,}645\cdot0{,}063\le(P_1-P_2)\le(0{,}18)+1{,}645\cdot0{,}063\right]=0{,}90$$

$$P\left[0{,}071\le(P_1-P_2)\le0{,}278\right]=0{,}90$$

مثلل : رقم (34.3):

أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من مدينة""أ"" ما فوجد أن 27 منهم لديهم مرض عضال، و أخذت عينة ثانية مستقلة عن الأولى حجمها 80 في مدينة أخرى ""ب"" فوجد أن 12 منهم لديهم مرض عضال. أوجد مجال الثقة للفرق باحتمال 95% .

$$n_1=100,\quad n_2=80,\quad 1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}0{,}05\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975\Rightarrow Z_{0{,}95}=1{,}96$$

$$\hat{P}_1=\frac{x_1}{n_1}=\frac{27}{100}=0{,}27,\quad \hat{P}_2=\frac{x_2}{n_2}=\frac{12}{80}=0{,}15,\quad \hat{P}_1-\hat{P}_2=0{,}27-0{,}15=0{,}12$$

$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\sqrt{\frac{\hat{P}_1\cdot(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\cdot(1-\hat{P}_2)}{n_2}}=\sqrt{\frac{0{,}27\cdot(1-0{,}27)}{100}+\frac{0{,}15\cdot(1-0{,}15)}{80}}=0{,}057$$

$$P[(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\le(P_1-P_2)\le(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}]=1-\alpha$$

$$P[(0{,}12)-1{,}96\cdot0{,}057\le(P_1-P_2)\le(0{,}12)+1{,}96\cdot0{,}057]=0{,}90$$

$$P[0{,}003\le(P_1-P_2)\le0{,}237]=0{,}95$$

5. مجالات ثقة لتباين مجتمع

لنأخذ عينة ذات الحجم n من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا و المطلوب إيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 بمستوى ثقة 100% $(1-\alpha)$; و عليه نجد أن هناك حالتين حسبما إذا كان متوسط المجتمع معلوم أم لا .

ا) مجال الثقة لتباين مجتمع متوسطه غير معلوم

أساسي : نظرية رقم *(17.3)*

لقد تطرقنا سابقا أنه إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير $\frac{(n-1)\cdot \grave{S}^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع كي تربيع X_2 بدرجات حرية (n-1) حيث أن تباين العينة محسوب بمتوسط العينة بدل متوسط المجتمع كما هو موضح في العلاقة التالية: $\grave{S}^2=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$. لهذا لإيجاد مجال الثقة لـ 100 % $(1-\alpha)$ نفترض أن المتغير العشوائي يقع بين النقطتين من جدول التوزيع كي تربيع. كما هو موضح أدناه:

$$P[\chi^2_{[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)]}\le\frac{(n-1)\cdot\grave{S}^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{[\frac{\alpha}{2},(n-1)]}]=1-\alpha$$

$$P[\frac{1}{\chi^2_{[\frac{\alpha}{2},(n-1)]}}\le\frac{\sigma^2}{(n-1)\cdot\grave{S}^2}\le\frac{1}{\chi^2_{[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)]}}]=1-\alpha$$

$$P[\frac{(n-1)\cdot\grave{S}^2}{\chi^2_{[1-\frac{\alpha}{2},(n-1)]}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)\cdot\grave{S}^2}{\chi^2_{[\frac{\alpha}{2},(n-1)]}}]=1-\alpha$$

مثال : رقم (35.3):

من مجتمع مجهول المتوسط الحسابي و التباين أخذت عينة بطريقة عشوائية حجمها n=36 ووجدت البيانات التالية :

$$\sum_{i=1}^{n=36}(X_i-\bar{x})=560 \qquad \bar{X}\,\frac{1}{36}\cdot\sum_{i=1}^{n=36}X_i=5,$$

أوجد مجال الثقة للتباين باحتمال 90%؟

الحل:

$$1-\alpha=90\Rightarrow\alpha=0{,}1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}05\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0{,}995,\quad n=36$$

$$\chi^2_{[0{,}05,(35)]}=60{,}275\quad,\chi^2_{[0{,}995,(35)]}=17{,}192$$

$$P\left[\frac{(n-1)\times\frac{A}{n-1}}{\chi^2_{[0{,}05,(35)]}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)\times\frac{A}{n-1}}{\chi^2_{[0{,}995,(35)]}}\right]=0{,}90$$

$$P\left[\frac{560}{60{,}275}\le\sigma^2\le\frac{560}{17{,}192}\right]=0{,}90$$

$$P[9{,}29\le\sigma^2\le32{,}57]=0{,}90$$

مثال : رقم (36.3):

عينة عشوائية حجمها 20 أخذت من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma)^2$ فأعطت تباين $S'^2=16$ أوجد مجال الثقة باحتمال 95% للتباين σ^2؟

الحل:

$$1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}025\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975,\quad n=20\quad S^2=16$$

$$\chi^2_{[0{,}025,(19)]}=32{,}852\quad,\chi^2_{[0{,}975,(19)]}=8{,}907$$

$$P\left[\frac{(n-1)\times\grave{S}^2}{\chi^2_{[0{,}025,(19)]}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)\times\grave{S}^2}{\chi^2_{[0{,}975,(19)]}}\right]=0{,}95$$

$$P\left[\frac{19\cdot16}{32{,}852}\le\sigma^2\le\frac{19\cdot16}{8{,}907}\right]=0{,}95$$

$$P[9{,}25\le\sigma^2\le34{,}13]=0{,}95$$

ب) مجال الثقة لتباين مجتمع متوسطه معلوم

أساسي : رقم (18.3)

لتكن لدينا $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير $\frac{n\,\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع كي تربيع X_2 بدرجات حرية (n-1) حيث أن تباين العينة محسوب بمتوسط المجتمع $\hat{\sigma}_n^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$. لهذا مجال الثقة لـ 100% $(1-\alpha)$ هو كما يلي :

$$P\left[\frac{(n)\cdot\hat{\sigma}_n^2}{\chi^2_{[1-\frac{\alpha}{2},(n)]}}\le\sigma^2\le\frac{(n)\cdot\hat{\sigma}_n^2}{\chi^2_{[\frac{\alpha}{2},(n)]}}\right]=1-\alpha$$

مثال : رقم (37.3):

لتكن X متغيرة عشوائية للتوزيع الطبيعي $N(40,\sigma^2)$، من أجل تقدير التباين ، سحبنا عينة عشوائية حجمها n=25

و ثم استخراج قيمة تباين للعينة(محسوب بمتوسط مجتمع)حيث $\sigma'^2=12$. استخرج مجال الثقة للتباين باحتمال 95% ؟

الحل:

$$1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}025\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975,\quad n=25\quad S^2=12$$

$$\chi^2_{[0{,}025,(25)]}=40{,}646\quad,\chi^2_{[0{,}975,(25)]}=13{,}120$$

$$P[\frac{(n)\times\hat{\sigma}^2_n}{\chi^2_{[0{,}025,(25)]}}\le\sigma^2\le\frac{(n)\times\hat{\sigma}^2_n}{\chi^2_{[0{,}975,(25)]}}]=0{,}95$$

$$P[\frac{25\cdot12}{40{,}646}\le\sigma^2\le\frac{25\cdot12}{13{,}120}]=0{,}95$$

$$P[7{,}38\le\sigma^2\le22{,}87]=0{,}95$$

6. مجال الثقة للنسبة بين تباين مجتمعين

في العديد من التجارب يكون الهدف مقارنة تبايني المجتمعين وإحدى الطرق المتبعة لهذا الغرض هي دراسة النسبة بين تباينين، وغالبا ما يكون متوسط المجتمع غير معلوم و عليه يتم تقدير تباين المجتمع بالمقدر غير المتحيز .

مثال : رقم (38.3):

من أجل مراقبة قوة الأنابيب المصنوعة ثم سحب عينة حجمها 25 بمتوسط 90,60 و تباين 62،80 من مصنع ""أ"" يتوزع بشكل طبيعي و ثم سحب عينة أخرى من المصنع ""ب"" يتوزع طبيعيا فكان حجم العينة 23 متوسطها 94،40 و تباينها 55،70 . المطلوب إيجاد فترة الثقة للنسبة بين تباين المجتمعين باحتمال 90%

$$1-\alpha=0{,}90\Rightarrow\alpha=0{,}1\Rightarrow F_{(24,22,0{,}995)}=2{,}03\,,F_{(24,22,0{,}005)}=0{,}50\quad,n_1=25\quad,n_2=23$$

$$\grave{S}^2_1=\frac{25\times62{,}80}{24}=65{,}42\quad,\quad\grave{S}^2_2=\frac{23\times55{,}70}{22}=58{,}23\quad,\quad\frac{\grave{S}^2_1}{\grave{S}^2_2}=1{,}12$$

$$P[\frac{\grave{S}^2_1}{\grave{S}^2_2}\times F_{(24,22,0{,}005)}\le\frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2}\le\frac{\grave{S}^2_1}{\grave{S}^2_2}\times F_{(24,22,0{,}995)}]=0{,}90$$

$$P[\frac{1{,}12}{0{,}50}\le\frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2}\le\frac{1{,}12}{2{,}03}]=0{,}90$$

$$P[0{,}55\le\frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2}\le2{,}24]=0{,}90$$

أساسي : نظرية رقم(19.3)

إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان تبايناهما ومتوسطهما غير معلومين ، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 , n_2 و تباينهما محسوب بالمقدر المتحيز S_1^2، S_2^2فإن مجال التقدير للنسبة يكتب كما يلي :

$$F_{(\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)} \leq \frac{(n_1)\cdot S_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2} \times \frac{(n_2-1)\cdot \sigma_2^2}{(n_2)\cdot S_2^2} \leq F_{(1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)}$$

$$F_{(\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)} \leq \frac{\grave{S}_1^2}{\sigma_1^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\grave{S}_2^2} \leq F_{(1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)} \quad , \quad \grave{S}_1^2 = \frac{n_1\cdot S_1^2}{(n_1-1)} , \quad \grave{S}_2^2 = \frac{n_2\cdot S_2^2}{(n_2-1)\cdot S_2^2}$$

$$p[\frac{\grave{S}_1^2}{\grave{S}_2^2} \times \frac{1}{F_{(\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\grave{S}_2^2}{\grave{S}_1^2} \times \frac{1}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1)}}] = 1-\alpha$$

مثال : رقم (38.3):

من أجل مراقبة قوة الأنابيب المصنوعة ثم سحب عينة حجمها 25 بمتوسط 90,60 و تباين 62،80 من مصنع ""أ"" يتوزع بشكل طبيعي و ثم سحب عينة أخرى من المصنع ""ب"" يتوزع طبيعيا فكان حجم العينة 23 متوسطها 94،40 و تباينها 55،70 . المطلوب إيجاد فترة الثقة للنسبة بين تباين المجتمعين باحتمال %90

الحل:

$$1-\alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow F_{(24,22,0,995)} = 2,03 , F_{(24,22,0,005)} = 0,50 \quad , n_1 = 25 \quad , n_2 = 23$$

$$\grave{S}_1^2 = \frac{25\times 62,80}{24} = 65,42 \quad , \quad \grave{S}_2^2 = \frac{23\times 55,70}{22} = 58,23 \quad , \quad \frac{\grave{S}_1^2}{\grave{S}_2^2} = 1,12$$

$$P[\frac{\grave{S}_1^2}{\grave{S}_2^2} \times F_{(24,22,0,005)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\grave{S}_1^2}{\grave{S}_2^2} \times F_{(24,22,0,995)}] = 0,90$$

$$P[\frac{1,12}{0,50} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1,12}{2,03}] = 0,90$$

$$P[0,55 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 2,24] = 0,90$$

7. تحديد حجم العينة

بعد دراستنا لكيفية ايجاذ فترات الثقة ، ينشأ لدينا سؤال ماهو حجم العينة المطلوبة كي نحصل على فترة ثقة بطول معلوم أو بخطأ محدد لا يتم تجاوزه.

و عليه تعطى حجم العينة وفقا لمجموعة من المعادلات التي حددها قانون توماس ثيمسون ، معادلةريتشارد جيجر و معادلة روبرت ماسون ، و تختلف حسب حجم المجتمع و العينة ، طريقة السحب ، نوع التوزيع ، و كذا التباين مجتمع معلوم أو مجهول. وهي حسب الحالات التالية:

ا) الحالة الأولى: عينة عشوائية بحجم n من مجتمع يتبع توزيع طبيعي و تباينه معلوم

حجم المجتمع	الإحصاءة المقدرة	هامش الخطأ الإحصائي	حجم العينة المطلوبة
غير محدود	μ	$d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n \geq [\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{d}]^2$

			في حال توزيع المجتمع غير طبيعي ، يجب أن يكون حجم العينة أكبر من 30
محدود بحجم N أو السحب بدون إرجاع	μ	$d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	$n\geq\frac{N\cdot Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma^2}{N\cdot d^2+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma^2}$ في حال توزيع المجتمع غير طبيعي ، يجب أن يكون حجم العينة أكبر من 30

ب) الحالة الثانية : عينة عشوائية بحجم n من مجتمع طبيعي تباينه مجهول و مقدر بتباين العينة

حجم المجتمع	الإحصاءة المقدرة	هامش الخطأ الإحصائي	حجم العينة المطلوبة
غير محدود	μ	$d=t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$n\geq[\frac{t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\cdot s}{d}]^2$ في حال توزيع المجتمع غير طبيعي ، يجب أن يكون حجم العينة أكبر من 30
محدود بحجم N أو السحب بدون إرجاع	μ	$d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	$n\geq\frac{N\cdot Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S^2}{N\cdot d^2+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S^2}$ في حال توزيع المجتمع غير طبيعي ، يجب أن يكون حجم العينة أكبر من 30

1الحالة الثالثة: عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع توزيع ذو الحدين و نسبة مجتمع مقدرة

حجم المجتمع	الإحصاءة المقدرة	هامش الخطأ الإحصائي	حجم العينة المطلوبة
غير محدود	p	$d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$n\geq\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{P}(1-\hat{P})}{d^2}$ في حال لم نستطع تقدير النسبة P نفترض أنها تساوي 0،5 فتصبح حجم العينة كما يلي: $n\geq\frac{Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4d^2}$
محدود بحجم N أو السحب بدون إرجاع	p	$d=Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	$n\geq\frac{N\cdot Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{P}(1-\hat{P})}{N\cdot d^2+Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{P}(1-\hat{P})}$ ففي حال لم نستطع تقدير النسبة P تصبح حجم العينة كما يلي:

			30 $n \geq \dfrac{N \cdot Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4 \cdot \left(N \cdot d^2 + Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}$

* *

*

لتقدير إحصائية مجتمع نستخدم نظريات توزيع المعاينة. حيث تسمح بتناول خصائص إحصائيات العينة (مثل متوسط العينة، تباين العينة ،النسبة في العينة، ... الخ) و علاقتها بالمعلمات المناظرة لها في المجتمع.

الاختبارات الاحصائية

I

الأهداف الخاصة بالفصل الرابع

يسمح هذا الفصل للطلاب بتحقيق جملة من الأهداف هي:

1. التعرف على إمكانية تحويل الأسئلة وفروض البحث إلى فروض إحصائية؛
2. القدرة على تحليل البيانات لقياس الخطر و تحديد الفرض الأمثل؛
3. القدرة على اختيار الاختبار المناسب لفروض البحث؛
4. القدرة على تقييم و اتخاذ القرار بشأن الفروض موضوع البحث.

سوف نتناول في هذا الفصل الجزء الثاني من الاستدلال الإحصائي وهو اختبارات الفروض.

يحاول الباحث اتخاذ قرار ما لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (المتوسط – النسبة) لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع "العينة المسحوبة لابد وأن تكون ممثلة تمثيلا جيدا للمجتمع محل الدراسة". ولكى نصل إلى قرار إحصائي لابد من وضع فروض عن خواص المجتمع، ومن هنا نختبر مدى صحة هذا الفرض من عدمه وذلك عن طريق العينة العشوائية التي تم سحبها من المجتمع.

وهذه الفروض هي ما نطلق عليه الفروض الإحصائية Hypothesis Statistical .

وتنقسم اختبارات الفروض الإحصائية إلى قسمين:

- أولا: اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية: وفى هذا القسم يكون معلوم لدينا التوزيع الذي تتبعه البيانات التي لدينا وما إذا كان توزيع(متصلاً أم منفصلاً (متقطعا) ويكون المطلوب هو اختبار فروض حول معالم المجتمع.
- ثانيا: اختبارات الفروض الإحصائية اللامعلمية: في كثير من التجارب والأبحاث يكون لدينا بيانات واقعية يصعب من خلالها التعرف على التوزيع الذي تتبعة ومن هنا نشأت الحاجة إلى ما يعرف باختبارات الفروض اللامعلمية حيث لا تحتاج مثل هذه الاختبارات معرفة شكل التوزيع الذي تتبعه البيانات محل الدراسة، كما يفضل استخدامها عندما يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع صغيرا نسبيا. وسوف نهتم في فصلنا هذا بالقسم الأول وهو اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية.

آ. أساسيات حول اختبار الفروض

تعتمد اختبارات الفرضيات على البيانات المتوفرة عن الظواهر المدروسة في المجتمعات الإحصائية.التي يتم جمعها إما من خلال الحصر الشامل للمجتمع أو من خلال طرق المعاينة التي تطرقنا إليها في الفصل الأول

1. مفهوم اختبارات الفروض الإحصائية

تعد الاختبار الفرضيات (اختبار المعنوية) من أهم أدوات الاستدلال الإحصائي و يعود فضل اقتراح هذه الإجراءات لكل من نيمان وبيرسون"J.Neyman § E.Pearson" عام 1930 من خلال الخطوات التالية :

1.صياغة فرضية معينة ؛
2.اختبار الفرضية؛
3.اتخاذ قرار بشأن الفرضية كنتيجة للاختبار.

تعريف : الفرض الإحصائي

هو تعبير أو ادعاء حول قيمة لمعلمة من معلمات المجتمع الهدف منها اختبار صحتها و تقرير ما إذا كانت مقبولة أو مرفوضة. و بناء على هذه النتيجة يصاغ قرار موضوعي بناء على البيانات المتوفرة للعينة. مثل الفرض القائل بأن متوسط درجة الطالب = 60 درجة أي $\mu=60$ أو الفرض القائل بأن نسبة التدخين في المجتمع = 0.70 أي $P=0.70$.

في هذا المجال يجب أن نميز بين الفرض hypothesis و الافتراض assumption. فالأول هو أسلوب إحصائي يراد به التأكد من صحة الفرضية من عدمها. أما الثاني فيقصد به الشروط التي يجب أن تتوافر في البيانات محل الدراسة حتى نتمكن من استخدام اختبار إحصائي معين. مثل الشروط الواجب توافرها في البيانات لتطبيق توزيع t : و هي أن يكون حجم العينة صغير أي أقل من 30 مفردة و الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم . مثل هذه الشروط تسمى افتراضات.

في حال تم تطبيق أسلوب اختبار الفرضيات على جميع مفردات المجتمع الإحصائي فإن الاستدلال و الاستنتاج المتوصل إليه بشأن الفرضية يكون بـ"نعم أو لا "، أما إذا كان الأسلوب الاختبار الفرضي مطبق على مفردات العينة فإن القرار الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما بالقبول أو الرفض باحتمالات معينة و هذا يعني أن الأسلوب الذي يعتمد على العينة يترك مجالا لاحتمال الوقوع بالخطأ في اتخاذ القرار.

أنواع اختبارات الفروض

توضع الفرضيات على معالم المجتمع مثل(μ ، p، σ)أو على بعض خصائصه مثل (الاستقلال، التوافق، التكرار ، الالتواء......إلخ و تختبر باستخدام معلومات العينة و أسلوب إختبار معين, و تصنف الاختبارات إلى نوعين أساسين :

أ- الاختبارات المعلمية:و تطبق على المتغيرات الكمية ؛

ب- الاختبارات اللامعلمية و تطبق على المتغيرات النوعية و الرتيبة.

يمكن التميز بينهما من خلال الجدول التالي:

الطرق المعلمية **parametric tests**	الطرق اللامعلمية **nonparametric tests**
تصلح للعينات الكبيرة بشكل أساسي	تصلح للعينات الكبيرة والصغيرة (مثلا إذا كان حجم العينة 6 أو اقل فلا بديل عن استخدام الاختبارات اللامعلمية
يشترط توفر معلومات عن توزيع المجتمع	لا يشترط افتراضات او معلومات حول توزيع المجتمع
تستخدم في التوزيعات المقيدة بالاعتدالية	تستخدم في حالة التوزيعات الحرة غير المقيدة
تناسب البيانات الفترية interval والنسبية ratio	تناسب البيانات الاسمية nominal والرتبية ordinal كما يمكن استخدامها في حالة البيانات الفترية والنسبية
تشترط تجانس التباين في المجتمعات التي تسحب منها	لا تشترط تجانس التباين

parametric tests	nonparametric tests
العينات	
تعتبر أكثر قوة في رفض الفرضية الصفرية عندما تكون خاطئة عند توافر الشروط المطلوبة للاختبارات المعلمية	تعتبر اقل قوة وتزداد قوة الاختبار اللامعلمية بزيادة حجم العينة
تستخدم جميع المعلومات في العينة	لا تستخدم جميع المعلومات في العينة حيث أن الدرجات الخام يتم تحويلها إلى رتب ranks أو إشارات signs

كما يمكن تصنيف الاختبارات حسب عدد المجتمعات و العينات كما يلي:

1. اختبارات لمجتمع واحد(عينة واحدة).
2. اختبارات لمجتمعين (عينتين مستقلتين).
3. احتيارات لعدة مجتمعات (لعدة عينات مستقلة).
4. اختبارات لعينين مترابطتين .
5. اختبارات لعدة عينات مترابطة.

تعريف : إحصائية الاختبار

متغير عشوائي لها توزيع احتمالي معروف، و تستخدم لوصف العلاقة بين القيم النظرية للمجتمع و القيم المحسوبة من العينة حيث:

W: مؤشر إحصائي يمكن تقديره من مشاهدات العينة ؛

E(W): تمثل القيمة المتوقعة لهذا المؤشر؛

σ_W: يمثل الخطأ للمؤشر الإحصائي.

فهي متغير عشوائي V يتبع دالة الاحتمال(f(v مهما كان نوع التوزيع الاحتمالي إلى المؤشر الإحصائي W بالشكل التالي:

$$V = \frac{W - E(W)}{\sigma_W} \sim f(v)$$

2. صياغة الفرض الإحصائي

الفرضية الصفرية(العدم) و الفرضية البديلة

عند القيام باختبار إحصائي يكون لدينا فرضيتان:

الفرضية الأول: هي ما تسمى بالفرضية الصفرية Null Hypotheisis وتصاغ عادة بنفي وجود فروق جوهرية بين معالم العينة و معالم المجتمع أو و أن العلاقة بين متغيرين يساوي صفر، و من هنا سميت بفرضية العدم،و هي فرضية التي يتم اختبار إمكانية رفضها على اعتبار أنها صحيحة نرمز لها بالرمز H_0. و صيغتها دائما تحوي على إشارة (=) حتى و أن كان المراد بها في العبارة (أكبر أو تساوي (≤) أو أقل من أو تساوي (≥) و تكتب كما يلي: H_0: $\mu = \theta$

قد يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200دولار و يحتاج إلى اختبار لمعرفة مدى صحة ادعائه

و منه الفرض العدمي أو الصفري يكتب بالشكل التالي: H_0: μ=200

إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذي يؤيدون مرشحا معينا لا تقل عن 30% فإن الفرضية العدمية تكتب بالشكل التالي: H_0: P=0،3

الفرضية الثانية: تسمى بالفرضية البديلة Alternative Hypothesis وهي الفرضية المكملة لفرضية العدم حيث يتم قبولها عند رفض فرضية العدم أو رفضها عند قبول فرضية العدم ويرمز لها بالرمز H_1

و تأخذ هذه الفرضية صيغ مختلفة و عكسية عن صيغ الفرضية الصفرية و هي كما يلي: (H_0: $\mu = \theta$، H_1: $\mu > \theta$) أو (H_0: $\mu = \theta$، H_1: $\mu < \theta$) أو (H_0: $\mu = \theta$، H_1: $\mu \neq \theta$)

كما أن كلا الفرضيتين معا تشكل فضاء الاختبار فعند قبول الفرضية العدمية نكون قد رفضنا الفرضية البديلة و العكس صحيح.

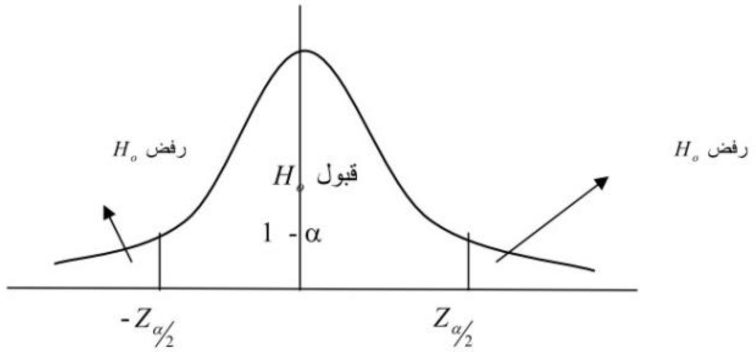
تأخذ الفرضيات البديلة شكلين الأولى -غير موجهة حيث يتخذ الباحث فيه قرار بوجود فروق أو علاقة بين متغيرين دون تحديد اتجاه الفروق أو نوع العلاقة. و الثانية موجهة يتخذ الباحث فيها قرار بوجود فروق أو علاقة بين متغيرين مع تحديد اتجاه الفروق أو نوع العلاقة (موجبة- سالبة).

حيث تشير كل صيغة من صيغ أعلاه إلى جهة الاختبار إذا ما كان من جهة واحدة أو من جهتين :

- فالفرضية البديلة $H_1: \mu \neq \theta$ تعني أن وسط المجتمع لا يساوي μ . و إنما أكبر منها أو أصغر منها و هي تعبر عن الاختبار ذو جهتين Tow Tails. و يعرف باختبار ثنائي **bilatéral**.

فمثلا: إذا كانت الفرضية العدمية هي أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذي يؤيدون مرشحا تساوي 30% فإن الفرضية البديلة في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي: $H_1: P \neq 0{,}3$ بمعنى أن متوسط نسبة المؤيدين لهذا المترشح لا تساوي 30%

$$H_o: \mu = \mu_o$$
$$H_1: \mu \neq \mu_o$$

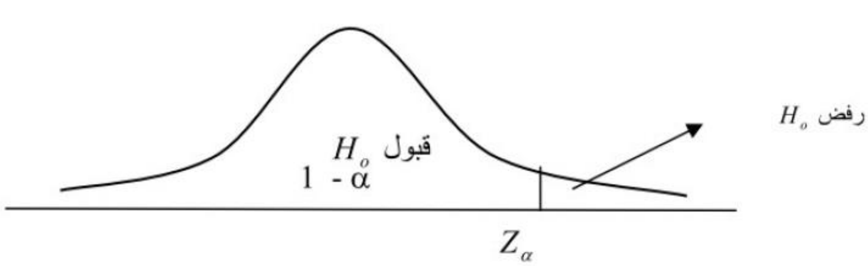


- في حين أن الاختبار ذو اتجاه واحد **Unilatéral** له حالتين :

الأولى : اختبار اتجاه اليمين (Right-Tailed Test) و الذي يطلق عليه أحيانا بالاختبار من الجانب العلوي (Upper-Tailes Test) إذا كانت الفرضية البديلة بإشارة الأكبر $H_1: \mu > \theta$ و تكون منطقة الرفض أقصى يمين المنحنى ومساحتها α.

فمثلا: قد تكون الفرضية البديلة كما يلي: $H_1: P > 0{,}3$ ،أي أن المؤيدين لهذا المترشح أكبر من 30%.

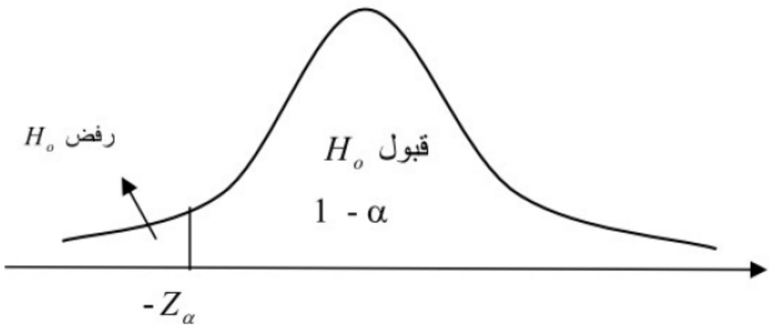
$$H_o: \mu = \mu_o$$
$$H_1: \mu > \mu_o$$



الثانية: اختبار اتجاه اليسار(Left-Tailed Test)و يطلق عليه أيضا الاختبار من الجانب السفلي (Lower-Tailed Test) إذا كانت إشارة الفرض البديل (H1) أقل من ($H_1: \mu < \theta$)و بالتالي فإن منطقة الرفض ستكون أقصى يسار المنحنى و مساحتها أيضا = α.

فمثلا: قد تكون الفرضية البديلة كما يلي: $H_1: P < 0{,}3$ ،أي أن المؤيدين لهذا المترشح أقل من 30%

$$H_o: \mu = \mu_o$$
$$H_1: \mu < \mu_o$$



ملاحظة

الفكرة الأساسية في اختبار الفرضية هي تقسيم المساحة تحت المنحنى الاحتمالي إلى منطقتين أحداهما تسمى" منطقة القبول" أي منطقة قبول الفرضية العدمية و الأخرى تسمى "منطقة الرفض" أي منطقة رفض الفرضية العدمية و التي تسمى أحيانا بالمنطقة الحرجة ، و تمثل منطقة القبول المساحة لدرجة الثقة بينما منطقة الرفض تمثل مساحة مستوى المعنوية أما القيمة التي تفصل بين منطقة الرفض و منطقة القبول تسمى بالقيمة الحرجة و تحدد من جدول التوزيع المستخدم.فإذا كنا بصدد توزيع طبيعي معياري فإن القيمة الحرجة $Z_{1-\alpha/2}$ و تتحدد بناء على قيمة مستوى المعنوية α المعطاة مسبقا قبل إجراء الاختبار. و وعليه تعتمد القيم الحرجة على ما يأتي:

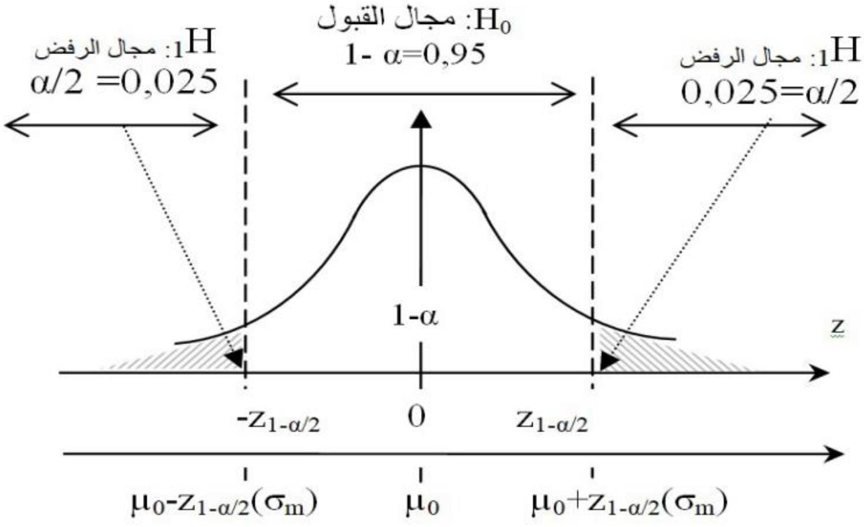
1. مستوى المعنوية α ؛
2. الفرضية البديلة ذات اتجاه واحد أو اتجاهين؛
3. التوزيع الاحتمالي للإحصائي الاختبار (فيشر، كي تربيع، ستودنت أو الطبيعي)؛
4. عدد درجات الحرية ، فيما إذا كان التوزيع الاحتمالي أحد توزيعات المعاينة، مع العلم أن درجات الحرية هو الفرق بين عدد مشاهدات العينة مطروحا منه القيود المستقلة المفروضة على تلك العينة)

مثال : رقم (1.4)

نريد اختبار الفرضية العدمية لمتوسط دخل الفرد في إحدى القرى بمستوى معنوية α = 0،05 في الحالات التالية :

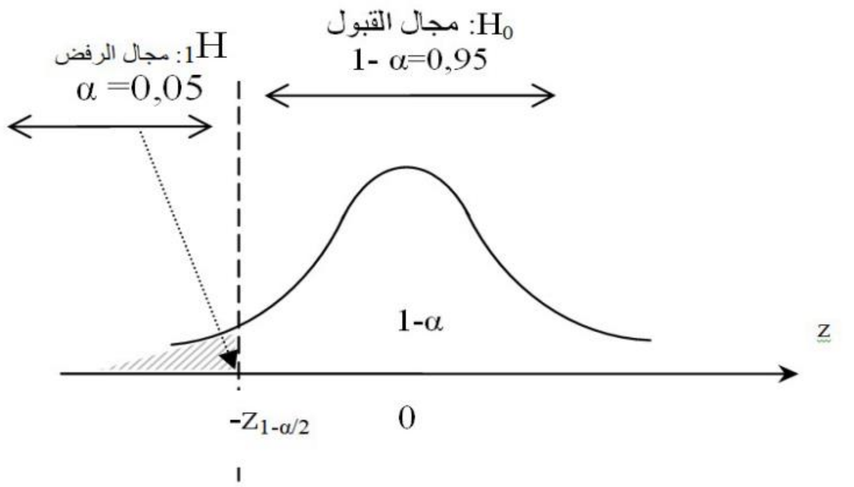
-مساوي لـ 200 دولا شهرياً، فنكتب الفرضية الصفرية بـ 200 =μ: H_0 و الفرضية البديلة بـ 200: μ ≠ :H_1

تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة في الشكل أذناه منطقة القبول و التي تساوي 95% و بالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون كل منهما 2،5% و النتيجة هو أن القرار أيا كان نوعه سيكون بمستوى معنوية 5% بمعنى أن نسبة احتمال أو نسبة الخطأ فيه من النوع الأول تساوي 5%.



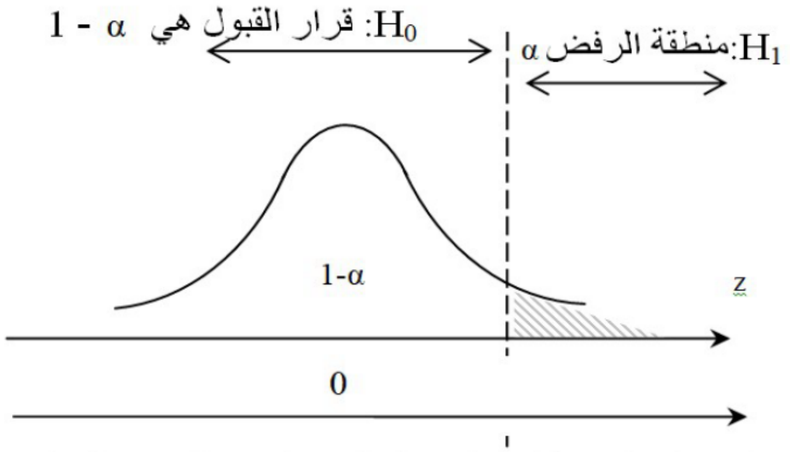
منطقتي القبول و الرفض في حالة قاعد القرار الثنائية

- اختبار فرضية أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 دولا شهرياً و عليه فإن الفرض العدمي يكتب كما يلي H_0: $\mu=$ 200 و تأخذ الفرضية البديلة الشكل التالي: H_1: μ < 200. تكون منطقة الرفض مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى و التي تكون مساوية لـ 5%



منطقتي القبول و الرفض في حالة قاعد القرار الأحادي على اليسار

-اختبار فرضية أن متوسط دخل الفرد أكبر بـ 200 دولا شهرياً فيكتب الفرض الصفري كما يلي: H_0: $\mu=$ 200 و تأخذ الفرضية البديلة الشكل التالي: H_1: μ > 200، وبالتالي فإن منطقة الرفض مركزة في الطرف الأيمن من المنحنى بمستوى معنوية 5% .



منطقتي القبول و الرفض في حالة قاعد القرار الأحادية في إتجاه اليمين

ملاحظة

ليس شرطا أن تصاغ الفرضية العدمية بالرموز، فقد يتم التعبير عنها بدون رموز، على سبيل المثال يريد الباحث أن يختبر ما إذا كانت عناك علاقة بين الأمية و الاستعداد للانحراف فتصاغ الفرضية بالشكل التالي: وجود علاقة منعدمة بين الأمية والاستعداد للانحراف)

3. أنواع الأخطاء

في الحقيقة إن عملية إجراء اختبار لأية فرضية عدم H_0، تتأثر بعدة عوامل أهمها حقيقة الفرضية H_0في المجتمع ونوع القرار المتخذ بشأنها ، وبذلك نجد أنه لدينا الحالات التالية:

- إن فرضية العدم قد تكون بحقيقتها صحيحة أو خاطئة؛
- إن القرار الذي سنأخذه حولها يمكن أن يكون قبولا أو رفضا لها؛

و عليه يمكن وضع هذه التقاطعات للحالات الأربع في الجدول الموالي:

نوع القرار المتخذ / حقيقة الفرضية H_0	قبول	رفض
H_0 صحيحة	القرار صحيح واحتماله $=1-\alpha$	القرار غير صحيح واحتماله $=\alpha$
H_0 خاطئة	القرار غير صحيح واحتماله $=\beta$	القرار صحيح واحتماله $=1-\beta$

فالخطأ من النوع الأول **Type I error**: يعني احتمال رفض الفرض العدمي مع أن هذا الفرض صحيح ويرمز له بالرمز α وتسمى α بمستوى المعنوية وأحيانا بحجم منطقة الرفض .و هذا يعني: احتمال(رفض H_0 /H_0 صحيح) = α

يعتبر مصطلح " مستوى المعنوية" واحدا من أهم المصطلحات في دراسة نظرية الاختبارات الفرضيات والمقصود به هو "احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول" . أو نسبة حدوثه، "أي احتمال رفض الفرضية العدمية بينما هي صحيحة" . فنستخدم عبارة مستوى المعنوية α في اختبار الفرضيات ، و مستوى الثقة $(1-\alpha)$ في حساب التقدير .

فالباحث يقوم قبل البدء بعملية الاختبار بتحديد مستوى المعنوية α حسب طبيعة البحث فيكون 5% في البحوث الاقتصادية ، الاجتماعية والإنسانية و 1% في البحوث الطبية والصيدلانية و البحوث التي تتطلب

الجودة الفائقة. و 10% في البحوث السياسة و استطلاعات الرأي العام. و منه فان انخفاض مستوى المعنوية فذلك يؤدي إلى زيادة احتمال اتخاذ الباحث قرارا صحيحا بشأن الفرضية

أما الخطأ من النوع الثاني **Type II error**:يعني احتمال قبول الفرض العدمي مع أن الفرض العدمي خاطئ أو يمكن القول قبول الفرض العدمي مع أن الفرض البديل صحيح و يرمز له بالرمز β أي أن:احتمال

(قبول H_0/ H_0 خاطئ) = β

(قبول H_0/ H_1 صحيح) = β

أما إذا أخذ متخذ القرار قرارا برفض الفرض العدمي مع أن الفرض العدمي خاطئ فهذا يرمز له بالرمز $1-\beta$ و يسمى بقوة الاختبار أي أن:احتمال (رفض H_0/ H_0 خاطئ) = $1-\beta$

تعريف : قوة الاختبار

وبناء على ذلك يتم تعريف قوة الاختبار : بأنها احتمال رفض الفرضية H_0 عندما تكون خاطئة. وهو يتمم احتمال قبولها β

أي أن دقة الاختبار تعرف باحتمال المتمم لـ β وهو يساوي $W= 1-\beta$

و عليه فأنه كلما كان احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني β قليل كلما أدى إلى زيادة قوة الاختبار $1-\beta$ و هذا يعني زيادة شدة رفض الفرضية العدمية H_0 عندما تكون هذه الفرضية خاطئة.

و تأسيسا على ما تقدم يمكن توضيح العلاقة بين الخطأين من النوع الأول α و النوع الثاني β :

1. انخفاض أحد الخطأين يؤدي إلى زيادة الخطأ الثاني؛
2. زيادة حجم العينة n يقلل من احتمال وقوع في كلا الخطأين α و β و بالتالي زيادة درجة الثقة.
3. يحسب احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول على أساس الفرضية العدمية H_0، في حين يحسب احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني على أساس الفرضية البديلة H_1.

4. خطوات اختبار الفروض الإحصائية

بعد أن تعرفنا على بعض المفاهيم الخاصة باختبار الفرضيات سنتطرق الآن إلى شرح الخطوات المتبعة في عملية اختبار الفرضيات:

1- صياغة الفرضية العدمية و الفرضية البديلة بشكل صحيح مع مراعاة تحديد جانب الاختبار هل من جهة أو من جهتين؛

تحديد مستوى المعنوية المطلوب؛

2-تحديد التوزيع المستخدم في الاختبار و حساب القيم الحرجة أو القيم الجدولية؛

3- تعين مجال القبول و مجال الرفض (الذي يعتمد على نوع التوزيع، اتجاه الاختبار ، مستوى المعنوية)

4-حساب قيمة إحصاءه الاختبار V_C حسب التوزيع المستخدم؛

5- مقارنة قيمة الإحصائية V_C مع القيمة الجدولية لها V_T و اتخاذ القرار بشأن رفض أو قبول الفرضية العدمية H_0. حيث يتم اتخاذ القرار بطريقتين :

الطريقة الأولى : مقارنة قيمة الإحصائية بالقيم الجدولية و ذلك على النحو التالي :

1. إذا كان الاختبار من جهتين $H_1: \mu \neq \mu_0$، نرفض H_0 إذا كانت الإحصائية تقع في منطقة الرفض أي تكون قيمة الإحصائية أكبر من القيمة الجدولية الموجبة أو أصغر من القيمة الجدولية السالبة.
2. إذا كان الاختبار من جهة واحدة نحو اليمين أي $H_1: \mu > \mu_0$ نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أكبر من القيمة الجدولية .
3. إذا كان الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار أي $H_1: \mu < \mu_0$ نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أصغر من القيمة الجدولية.

الطريقة الثانية: المعنوية المحسوبة **P- VALUE**

تمثل المعنوية المحسوبة بأنها احتمال يحسب لقيمة المعيار، و يؤثر في حسابها التوزيع المستخدم في الاختبار و صيغة الفرضية البديلة و ذلك كما يلي:

1. إذا كان الاختبار من جهتين $H_1: \mu \neq \mu_0$، فإن (قيمة الإحصائية إذا كانت موجبة<المتغير العشوائي) P-VALUE=2*P، أو(قيمة الإحصائية إذا كانت سالبة>المتغير العشوائي)P-VALUE=2*P، فنرفض H_0 إذا كانت P-VALUE أقل من مستوى المعنوية و نقبلها إذا كانت أكبر أو تساوي من مستوى المعنوية.
2. إذا كان الاختبار من جهة واحدة نحو اليمين أي $H_1: \mu > \mu_0$ فإن(قيمة الإحصائية <المتغير العشوائي)P-VALUE=P، نرفض فنرفض H_0 إذا كانت P-VALUE أقل من مستوى المعنوية ونقبلها إذا كانت أكبر أو تساوي من مستوى المعنوية.

3. إذا كان الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار أي إن $H_1: \mu < \mu_0$ فإن (قيمة الإحصائية >المتغير العشوائي)P-VALUE=P، نرفض H_0 إذا كانت P-VALUE أقل من مستوى المعنوية و نقبلها إذا كانت أكبر أو تساوي من مستوى المعنوية.

ب. اختبارات المطابقة لمعلمة مجتمع واحد

تهدف اختبارات المطابقة إلى التحقق مما إذا كان يمكن اعتبار الإحصاءات المستخرجة من العينة ممثلة لمعلمات لمجتمع .

ومن ثم يتم اختبار هذه الفرضية من خلال مقارنة الإحصائية المناظرة للمعلمة والتي يتم حسابها من العينة، وهنا يطرح تساؤل حول مدى تمثيل العينة للمجتمع المسحوبة منه أي مدى انتماء العينة للمجتمع الذي سحبت منه العينة، ومن المعروف أن إحصائية العينة ليس بالضرورة أن تساوي معلمة المجتمع حيث انه إحصائيا قد يكون هناك فرق بين الإحصائي والمعلمة سواء بالزيادة أو النقصان وهذا الفرق يمكن تجاهله إحصائيا إذا كان فرقا ظاهريا وليس حقيقيا أو جوهريا وبالتالي ليس له خطورة على مدى تمثيل العينة للمجتمع. وفي هذه الحالة يمكن اعتبار مثلا أن متوسط العينة لا يختلف إحصائيا عن متوسط المجتمع وان العينة المسحوبة فعلا تمثل المجتمع وفي هذه الحالة نعتبر ($\mu = x$).

وفي بعض الحالات لا يمكن أن نتجاهل هذا الفرق ونعتبره فرق حقيقي أو جوهري (معنوي) ومسالة تحديد ما إذا كان الفرق معنوي أو غير معنوي ليست متروكة للتقدير الشخصي للباحث ولكن تبنى اعتمادا على الخصائص الأساسية للتوزيع العينية للمتوسطات.

1. اختبار مطابقة متوسط مجتمع

نميز حالتين الأولى نستخدم فيها اختبار التوزيع الطبيعي و الثانية نستخدم فيها اختبار توزيع ستودنت

ا) اختبارات التوزيع الطبيعي لمطابقة المتوسط

نستخدم اختبارات التوزيع الطبيعي في حال توفر الشروط التالية :

- حجم العينة كبير؛
- تقارب حجم العينين ؛
- طريقة السحب العينة من المجتمع تكون عشوائية؛
- تباين المجتمع معلوم، في حال عكس نستعمل تباين العينة غير متحيز؛
- العينات المسحوبة مستقلة عن بعضها البعض ؛
- العينات المسحوبة متجانسة :يقصد بتجانس عينة مدى انتسابها إلى مجتمع بحثي واحد مما يضفي عليها خصائص مشتركة. فإذا انتسبت العينة إلى مجتمع واحد فهي متجانسة وإذا لم تنتسب إلى مجتمع واحد فهي غير متجانسة، وهو ما يؤثر على نتائج البحث بشكل كبير. يتم قياس التجانس باستخدام اختبار فيشر للنسبة بين تباين عينتين.
- توزيع البيانات يكون معتدل:يقصد باعتدالية التوزيع أن البيانات خالية من القيم المتطرفة أو العشوائية وان منحني البيانات معتدل ويشبه شكل الجرس . يتم قياس اعتدالية التوزيع باعتماد على معامل الالتواء و التفلطح أو من خلال اختبار كولموجوروف - سميرنوف (-Kolmogorov Smirnov test) أو اختبار شابيرو Shapiro- Wilk- Test. للتوزيع الطبيعي في برنامج SPSS؛

أساسي : نظرية (1.4)

لدينا عينة عشوائية $x_1,x_2,x_3...x_n$ ، حجمها n و متوسطها $\bar{X}$ ، و أردنا مطابقة متوسط العينة المفترض μ_0 مع متوسط المجتمع μ (أو اختبار إذا كان الفرق بين متوسط المجتمع و العينة معنوي أو غير معنوي)باحتمال ثقة $(1-\alpha)$ ، حيث تكون صيغة الاختبار كما يلي: $H_0: \mu = \mu_0$، $H_1: \mu \neq \mu_0$،نستخرج قيمة الإحصائية التي نرمز لها بـ Z_C . حسب الحالات التالية :

الأولى: تباين المجتمع معلوم و يتوزع بشكل طبيعي (يتم قياس اعتدالية) مهما كان حجم العينة فإن

الإحصائية Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي :
$$Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- الثانية: مجتمع توزيعه مجهول ، تباينه معلوم، و حجم العينة أكبر من 30 نستخدم نظرية النهاية المركزية حيث تقترب الإحصائي Z_C إلى التوزيع الطبيعي و هي: $Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

الثالثة: مجتمع توزيعه طبيعي و تباينه مجهول و حجم العينة أكبر من 30 فإن الاحصائية Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي في حالتي تباين العينة متحيز و غير متحيز على التوالي :

$$Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \quad \text{أو} \quad Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}$$

و عليه لاتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية العدمية نستخدم إحدى الطرق التالية:

- باستخدام مجال الثقة : نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كان متوسط العينة المفترض μ_0 خارج مجال القبول :

المجال في الحالة الأولى و الثانية: $\mu_0 \notin [\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

المجال في الحالة الثالثة:

$$\mu_0 \notin [\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}]$$

أو

$$\mu_0 \notin [\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}]$$

و نقبل الفرضية العدمية في حال كانت μ_0 داخل مجال الثقة.

- باستخدام المقارنة بين قيمة الإحصائية Z_C و القيمة الجدولية لها Z_T في جدول التوزيع الطبيعي:

حيث نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت $Z_C \notin [-Z_{\frac{\alpha}{2}}, +Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن هذا المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاهين(مستوى المعنوية يقسم إلى جزأين α/2).

و نرفض الفرضية العدمية H_0 في حال كان الاختبار لاتجاه واحد :

إختبار من اليسار $|Z_C|<(Z_t=-Z_\alpha)$

أو

إختبار من اليمين $|Z_C|>(Z_t=Z_\alpha)$

و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاه واحد.

ملاحظة: إذا كان الاختبار أحادي الجانب (يمين أو يسار)فإن القيمة الحرجة لـ Z هي القيمة المقابلة لكامل مستوى المعنوية α، و نرمز لها بـ Z_α

- باستخدام المعنوية: و هي أسهل طريقة في اتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية .حيث يتم مقارنة المعنوية المحسوبة P-Value مع مستوى المعنوية المعطى α فنقبل الفرضية العدمية H_0 إذا كانت P-Value>α و نرفضها في حال العكس.

مثال : رقم (2.4)

لنفرض أن متوسط اشتغال المصابيح يتبع التوزيع الطبيعي بتباين 100 ، نسحب عينة عشوائية حجمها 25 ، نريد استخراج مجال متوسط العينة لمطابقة متوسط المجتمع حتى تحقق الفرضيات التالية : $H_0: \mu_0 =$ 1000h ، $H_1: \mu_1 =1075$

، جد كل من الخطأ من النوع الثاني و قوة الاختبار إذا علمت أن الاختبار الفرضيات يكون من جهة اليمنى، و مستوى المعنوية هو 5%.

- الحالة الأولى: $H_0: \mu_0 = 1000h$

بفرض أن مستوى الخطأ هو $\alpha= 5\%$, و التي تمثل مجموع قيم المتغير العشوائي التي تستبعد فرض H_0 لصالح فرض

H_1، يكون احتمال(رفض H_0 علما أن H_0/ صحيح) $=\alpha =0,05$

$$P(Reject\ H_0|H_1\ True)=0,05 \Rightarrow P(\bar{X}>d)=0,05$$

$$P(\bar{X}>d)=P(\frac{\bar{X}-1000}{25/\sqrt{100}}>\frac{d-1000}{25/\sqrt{100}})=0,05, \qquad Z_{0,05}=1,645$$

$$\frac{d-1000}{20}=1,645 \Rightarrow d \approx 1033$$

إذن نرفض H_0 $\bar{X} \geq 1033\ heures$

إذن نقبل H_0 $\bar{X} < 1033\ heures$

الحالة الثانية : $H_1: \mu_1 =1075$ نستعمل مخرجات الخطأ من النوع الأول α لاستخراج احتمال الخطأ من النوع الثاني β والمعرف كما يلي :(قبول H_0 /H_1 صحيح) $= \beta$

$$P(do\ not\ Reject\ H_0|H_1\ True)=0,05 \Rightarrow P(\bar{X}<d|H_1)=0,05$$

$$\beta=P(\bar{X}<1033)=P(\frac{\bar{X}-1075}{25/\sqrt{100}}<\frac{1033-1075}{25/\sqrt{100}})=P(\frac{\bar{X}-1075}{20}<-2,10)$$

$$\beta=P(\frac{\bar{X}-1075}{20}<-2,10)=0,0179$$

احتمال رفض الفرضية البديلة صحيح تتميز بالضعف و هو ما يعني أن قوة الاختبار $1-\beta$ قوية بنسبة 0,9821

مثال : رقم (3.4)

عينة عشوائية حجمها 49 شخصا اختيرت من أفراد دولة ما ، إذا كان متوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية هو 75 دولار و الانحراف المعياري للمجتمع لدخول الأفراد يساوي 14 دولارا. أختبر أن يكون متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة مساوي لـ 72 دولار و ذلك بمستوى معنوية 5%، استخرج الخطأ من النوع الثاني وقوة الاحتمال عندما تكون

$H_1:\mu_0 =71$

الحل:

لدينا: $n=49$, $\sigma=14$,$\mu_0=72$, $\bar{X}=75$

الفرضية العدمية هي: $H_0: \mu = 72$ و الفرضية البديلة الإحصائية: $H_1: \mu \neq 72$

بما أن حجم العينة كبير (n>30) و تباين المجتمع معلوم فإن الإحصائي Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري ، كما نقوم بحساب القيمة الجدولية ويرمز لها بـ Z_t وفي حالتنا (اختبار ثنائي بمستوى معنوية 5%)

$$Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{75-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}}=1,5$$

$$\mp Z_t=\mp Z_{\frac{0,05}{2}}=\mp Z_{0,025}=\mp 1,96$$

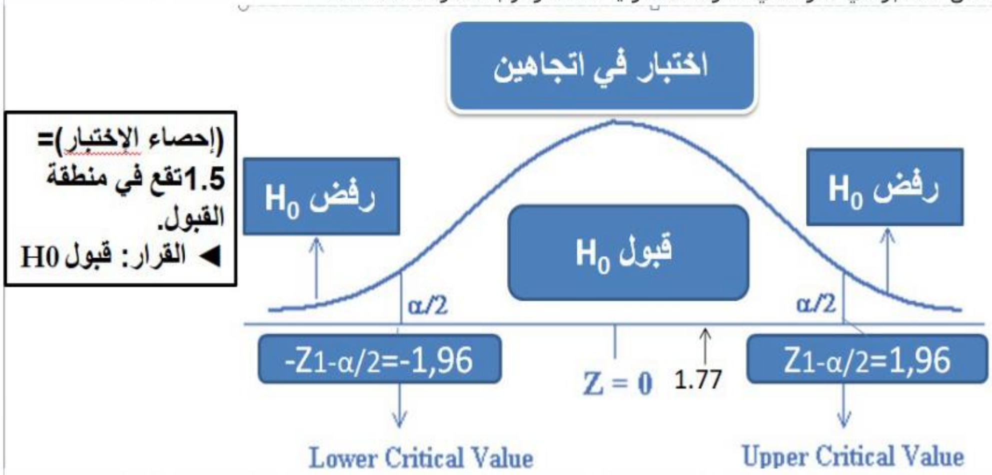
القرار:نقرر قبول أو رفض H0 حسب قاعدة القرار:

الأولى : نقوم بحساب مجال الثقة لمتوسط المجتمع:

$$[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=[75-1,96\cdot\frac{14}{\sqrt{49}},75+1,96\cdot\frac{14}{\sqrt{49}}]=[71,08 \quad , \quad 78,92]$$

نلاحظ أن القيمة التي نحن في صدد اختبارها هي ضمن مجال الثقة و عليه نقبل الفرضية العدمية.

الثانية : مقارنة قيمة Z الإحصائية بالمجدولة وفي حالتنا نقبل H0 لأن $Z_t > Z_c$ ونقبل H1 أي أن متوسط دخل الأسبوعي لمواطني الدولة مساوي لـ 72 دولار بمستوى خطأ 5%.



الثالثة: مقارنة بين حساب المعنوية المحسوبة P-Value والمعنوية المعطاة α=%5

P-Value =2(Z>1,5)=2(0,6681)=0,13362

نلاحظ أن: (P-Value (0,13362)>α(0,05 ومنه نقبل الفرضية العدمية

ملاحظة

لإيجاد القيم الحرجة لـ $\bar{X}$ نحل المراجحة التالية :

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>Z_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\bar{X}>Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0$$

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-Z_{\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\bar{X}<-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0$$

$$\bar{X}\in[Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0,-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu_0]\Rightarrow\bar{X}\in[68,08 \quad , \quad 75,92]$$

نستخدم القيم الحرجة في إيجاد احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول α واحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني β (قوة الاختبار):

$$\alpha=P(Reject\ H_0|H_0\ is\ true)$$

$$\alpha=P(\bar{X}>86,08\vee\bar{X}<75,92|\mu_0=72)$$

$$\alpha=P(\bar{X}>68,08|\mu_0=72)+P(\bar{X}<75,92|\mu_0=72)$$

$$\alpha=P(Z>\frac{68,08-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}})+P(Z>\frac{75,92-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}})$$

$$\alpha=P(Z>-1,96)+P(Z>+1,96)=0,05$$

وهو نفس مستوى المعنوية الذي تم استخدامه.

و بمعرفة الخطأ من النوع الأول α يمكننا أن نستخرج احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني عندما تكون

71= $H_1:\mu_0$ كما يلي:

$$\beta = P(Reject\ H_0 | H_1\ is\ true)$$
$$\beta = P(68{,}08 < \bar{X} < 75{,}92 | \mu = 71)$$
$$\beta = P(\bar{X} > 68{,}08 | \mu = 71) + P(\bar{X} < 75{,}92 | \mu = 71)$$
$$\beta = P\left(\frac{68{,}08 - 71}{\frac{14}{\sqrt{49}}} < Z < \frac{75{,}92 - 71}{\frac{14}{\sqrt{49}}}\right)$$
$$\beta = P(-1{,}46 < Z < +2{,}46) = 0{,}9209$$

و بالتالي تكون قوة الاختبار ضعيفة $1-\beta = 1-0{,}9209 = 0{,}0791$

مثال : رقم (4.4)

تتبع أوزان الأطفال حديثي الولادة التوزيع طبيعي معدله 2،9 كلغ و انحرافه المعياري 0،6 كلغ. يرى الأطباء أن المولودين لأمهات مصابات بمرض السكري تكون أوزانهم أقل من المعدل ، أكتب فرضية العدمية و البديلة لادعاء الأطباء بمستوى معنوية 5%؟ اختبر الفرضية إذا كان حجم حجم العينة العشوائية للمولودين لأمهات مصابات بالسكري هو 9 بمتوسط حسابي قدره 3،4 كلغ .

الحل:

لدينا:، $\bar{X}$ =3،7 , μ_0=2،9, σ=0،6 , n=9

الفرضية العدمية هي أن ميزان المولودين مساوي للمعدل العام إذن نكتب : H_0: μ = 2،9 والفرضية البديلة الإحصائية هي أن ميزان الاطفال لامهات مريضات بسكر أقل من المتوسط العام H_1: μ<2,9

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم فإن الإحصائي Z_C تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث :

Z_t=-$Z_{0.05}$=-1،645 ، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أصغر من القيمة الجدولية.Z_C<-1,645

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3{,}4 - 2{,}9}{\frac{0{,}6}{\sqrt{9}}} = 2{,}5$$
$$(Z_C = 2{,}5) < (Z_t = -1{,}645) \Rightarrow H_0 \quad True$$

أي هناك دلالة كافية بمستوى خطأ 5% أن المولودين بأمهات مصابات بداء السكري تكون أوزانهم مساوية للمعدل العام 2،9 كلغ.

مثال : رقم (5.4)

إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط العبوة 240 غرام، و ذلك بانحراف 18 غرام، حيث كانت الأوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي . تم أخذ عينة من 9 عبوات و ذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة ،فوجد أن متوسط وزن العبوة هو 255 غرام. اختبر أن متوسط وزن العبوة عند مستوى معنوية 10%.

لحل:

لدينا:، $\bar{X}$ =255 , μ_0=240, σ=18 , n=9

الفرضية العدمية هي :240 = μ :H_0 والفرضية البديلة الإحصائية هي :240<μ :H_1

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم فإن الإحصائي Z_C تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث :

Z_t=$Z_{0.10}$=1,28 ، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليمين ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أكبر من القيمة الجدولية.

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{255 - 240}{\frac{18}{\sqrt{9}}} = 2{,}5$$
$$(Z_C = 2{,}5) > (Z_t = 1{,}28) \Rightarrow H_0 \quad Reject$$

أي أن هناك معنوية كافية على مستوى 0،05 أن العبوات تكون أوزانهم أكبر من الوزن المتوسط 240 غرام.

مثال : رقم (6.4)

يدعي أحد الأطباء أن من الآثار الجانبية لاستعمال دواء معين هو انخفاض ضغط الدم بمتوسط 75 ، تم سحب عينة قوامها 49 مريض، و تم قياس ضغط الدم بعد تعاطي هذا الدواء فوجد أن متوسط ضغط الدم في العينة هو 65،5 و بانحراف معياري قدره 6،4 . اختبر صحة ادعاء الأطباء في صحة استعمال الدواء تحت مستوى معنوية 0،05

الحل:

دينا:، $\bar{X}=65{،}5$, $\mu_0=75$, $S'=6{,}4$, $n=49$

الفرضية العدمية أن استعمال الدواء لا يؤدي إلى انخفاض الضغط أي: $H_0: \mu = 75$ والفرضية البديلة الإحصائية أن استعمال الدواء يؤدي إلى خفض الضغط هي: $H_1: \mu<75$

بما أن المجتمع توزيعه مجهول و تباينه مجهول و حجم العينة كبير فإن الإحصائية Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث: $Z_t=-Z_{0.05}=-1{,}645$، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أقل من القيمة الجدولية.

$$Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}=\frac{65{,}5-752{,}9}{\frac{6{,}4}{\sqrt{49}}}=-4{,}292$$

$$(Z_C=-4{,}92)<(Z_t=-1{,}645)\Rightarrow H_0 \quad True$$

ومنه فادعاء الأطباء صحيح بأن الدواء لع أعراض صحية فهو يسبب ارتفاع ضغط الدم .

ب) اختبارات توزيع ستودنت لمطابقة المتوسط

يعد اختبار ستودنت (T-test) من أشهر الاختبارات التي تندرج تحت أساليب الإحصاء الاستدلالي، ويرجع تطوير توزيع t-test و t"ستودنت" إلى أبحاث العالم الانجليزي ويليام سيلي جوسيت ، الذي نشرها في عام 1908 تحت اسم مستعار Student ولهذا سمى الاختبار به (Student's t-test).

يتميز توزيع t بأنه توزيع كمي مستمر وواحد من توزيعات المعاينة ، متوسطه = 0 وتباينه يقارب الواحد وهذه الخصائص تشبه خصائص توزيع z المعياري. ومن خصائصه أن منحناه متفلطح اكثر بقليل من منحنى التوزيع الطبيعي وهذا ما يميزه عن التوزيع الطبيعي المعياري.

افتراضات اختبار ستودنت t هي نفسها افتراضات اختبار التوزيع الطبيعي فاعتدال التوزيع شرط أساسي، تليها تجانس العينة ...الخ، ومع ذلك بالنسبة لاختبار t لا يكون تباين المجتمع شرط ، كما أن استخدامه يكون بنطاق واسع عندما يكون حجم العينة محصورا بين 5 و30، وفي حال تجاوز حجم العينة 30 فإن توزيع ستودنت يؤول و يقترب إلى توزيع الطبيعي .

أساسي : نظرية (2.4)

نستخدم اختبار ستودنت لمطابقة متوسط عينة المفترض μ_0 مع متوسط المجتمع μ أو لاختبار معنوية الفرق بين متوسط المجتمع و العينة معنوي باحتمال ثقة α، في حال كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، تباين المجتمع غير معلوم و حجم العينة أقل من 30 و أكبر من 5 . أو في حالة توزيع المجتمع مجهول(لكنه معتدل)وحجم العينة أقل من 30. حيث تكون الإحصائية المحسوبة والتي نرمز لها بـ T_C كما يلي :حسب نوع تباين العينة متحيز و غير متحيز على التوالي:

$$T_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\sim t(n-1) \quad \text{أو} \quad T_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$$

و التي تتبع توزيع ستودنت بمستوى معنوية α و بدرجة حرية n-1.

عليه لاتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية العدمية نستخدم إحدى الطرق التالية:

• باستخدام مجال الثقة : نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كان متوسط العينة المفترض μ_0 خارج مجال القبول :

$$\mu_0\notin[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}]$$

أو

$$\mu_0\notin[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}},\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}]$$

و نقبل الفرضية العدمية في حال كانت μ_0 داخل مجال الثقة.

• باستخدام المقارنة بين قيمة الإحصائية t_C و القيمة الجدولية لها t_T في جدول توزيع ستودنت:
حيث نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت $t_C \notin [-t_{\frac{\alpha}{2}}, +t_{\frac{\alpha}{2}}]$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن هذا المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاهين(مستوى المعنوية يقسم إلى جزأين).
و نرفض الفرضية العدمية H_0 في حال كان الاختبار لاتجاه واحد :

إختبار من اليسار $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad |t_C| < (t_t = -t_\alpha)$

أو

إختبار من اليمين $H_1: \mu > \mu_0$ $\quad |t_C| > (t_t = t_\alpha)$

و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائية تكون ضمن المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاه واحد.

• باستخدام المعنوية: و هي أسهل طريقة في اتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية .حيث يتم مقارنة المعنوية المحسوبة P-Value مع مستوى المعنوية المعطى α فنقبل الفرضية العدمية H_0 إذا كانت P-Value>α و نرفضها في حال العكس.

مثال : رقم (7.4)

اختار باحث عينة عشوائية مكونة من 9 طلاب سنة ثانية علوم اقتصادية و أجرى لهم امتحانا في مقياس الإحصاء الاستدلالي و تم الحصول على الدرجات الآتية:14،18،20، 10،16،10،6،18،16
فهل يمكن اعتبار متوسط هذه العينة أعلى من المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية البالغ 11،4 ، اختبر ذلك عند مستوى 0،05

الحل:

الفرضية العدمية: متوسط العينة يمثل المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية و البالغ 11،4 أي :
$H_0: \mu = 11{,}4$ والفرضية البديلة هي أن متوسط العينة أعلى من المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية البالغ 11،4 أي هي: $H_1: \mu > 11{,}4$

ومتوسط و انحراف العينة هما على التوالي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{128}{9} = 14{,}22$$

$$S' = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{171{,}56}{8}} = 4{,}63$$

من خلال جدول الإحصائي نستخرج قيمة t الجدولية عند مستوى معنوية 0،05 و درجة الحرية حيث n-1=8 نجدها:

$t(\alpha, n-1) = t(0{,}05-8) = 1{,}86$

بالمقابل نقوم بحساب الإحصائية T_C و التي تأخذ الشكل التالي:

$$T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} = \frac{14{,}22 - 11{,}4}{\frac{4{,}63}{\sqrt{9}}} = 1{,}83$$

$$(T_C = 1{,}83) < (t_t = 1{,}86) \Rightarrow H_0 \ \ True$$

نقبل الفرضية الصفرية التي تنص على أن متوسط العينة يمثل المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية و البالغ 11،4

مثال : رقم (8.4)

أخذت عينة عشوائية حجمها 25 مفردة بانحراف معياري قدره 3 من مجتمع يتبع توزيع طبيعي وأردنا اختبار حيث H_0
$\mu_0 = 60$ مقابل $H_1: \mu > 55$ على مستوى معنوية 0،01

الحل :

لدينا ، $\bar{X} = 55$, $60 = \mu_0$, $n=25$, $S'=3$

بما أن المجتمع يتبع توزيع طبيعي و تباينه مجهول و حجم العينة أقل من 30 إذن الإحصائية تؤول لتوزيع ستودنت t ، وبما أن الاختبار في اتجاه اليمين نقوم بحساب قيمة التي الجدولية بـ $t_{(\alpha, n-, 24.)} = 1{,}341$

إذا كانت t الإحصائية المحسوبة أكبر من t الجدولية نرفض الفرضية العدمية و في حال العكس نقبل الفرضية العدمية.

$$\beta = P(Reject\ H_0 | H_1\ is\ true)$$
$$\beta = P(68{,}08 < \bar{X} < 75{,}92 | \mu = 71)$$
$$\beta = P(\bar{X} > 68{,}08 | \mu = 71) + P(\bar{X} < 75{,}92 | \mu = 71)$$
$$\beta = P\left(\frac{68{,}08 - 71}{\frac{14}{\sqrt{49}}} < Z < \frac{75{,}92 - 71}{\frac{14}{\sqrt{49}}}\right)$$
$$\beta = P(-1{,}46 < Z < +2{,}46) = 0{,}9209$$

و بالتالي تكون قوة الاختبار ضعيفة $1-\beta = 1 - 0{,}9209 = 0{,}0791$

مثال : رقم (4.4)

تتبع أوزان الأطفال حديثي الولادة التوزيع طبيعي معدله 2،9 كلغ و انحرافه المعياري 0،6 كلغ. يرى الأطباء أن المولودين لأمهات مصابات بمرض السكري تكون أوزانهم أقل من المعدل ، أكتب فرضية العدمية و البديلة لادعاء الأطباء بمستوى معنوية 5%؟ اختبر الفرضية إذا كان حجم حجم العينة العشوائية للمولودين لأمهات مصابات بالسكري هو 9 بمتوسط حسابي قدره 3،4 كلغ .

الحل:

لدينا: $n=9$, $\sigma=0{,}6$, $\mu_0=2{,}9$, $\bar{X}=3{,}7$

الفرضية العدمية هي أن ميزان المولودين مساوي للمعدل العام إذن نكتب : $H_0: \mu = 2{,}9$ والفرضية البديلة الإحصائية هي أن ميزان الاطفال لامهات مريضات بسكر أقل من المتوسط العام $H_1: \mu < 2{,}9$

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم فإن الإحصائي Z_C تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث :

$Z_t=-Z_{0.05}=-1{,}645$ ، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أصغر من القيمة الجدولية.$Z_C<-1{,}645$

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3{,}4 - 2{,}9}{\frac{0{,}6}{\sqrt{9}}} = 2{,}5$$
$$(Z_C = 2{,}5) < (Z_t = -1{,}645) \Rightarrow H_0 \quad True$$

أي هناك دلالة كافية بمستوى خطأ 5% أن المولودين بأمهات مصابات بداء السكري تكون أوزانهم مساوية للمعدل العام 2،9 كلغ.

مثال : رقم (5.4)

إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط العبوة 240 غرام، و ذلك بانحراف 18 غرام، حيث كانت الأوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي . تم أخذ عينة من 9 عبوات و ذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة ،فوجد أن متوسط وزن العبوة هو 255 غرام. اختبر أن متوسط وزن العبوة عند مستوى معنوية 10%.

لحل:

لدينا: $n=9$, $\sigma=18$, $\mu_0=240$, $\bar{X}=255$

الفرضية العدمية هي: $H_0: \mu = 240$ والفرضية البديلة الإحصائية هي: $H_1: \mu > 240$

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه معلوم فإن الإحصائي Z_C تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث :

$Z_t=Z_{0.10}=1{,}28$ ، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليمين ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أكبر من القيمة الجدولية.

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{255 - 240}{\frac{18}{\sqrt{9}}} = 2{,}5$$
$$(Z_C = 2{,}5) > (Z_t = 1{,}28) \Rightarrow H_0 \quad Reject$$

أي أن هناك معنوية كافية على مستوى 0،05 أن العبوات تكون أوزانهم أكبر من الوزن المتوسط 240 غرام.

مثال : رقم (6.4)

يدعي أحد الأطباء أن من الآثار الجانبية لاستعمال دواء معين هو انخفاض ضغط الدم بمتوسط 75 ، تم سحب عينة قوامها 49 مريض، و تم قياس ضغط الدم بعد تعاطي هذا الدواء فوجد أن متوسط ضغط الدم في العينة هو 65،5 و بانحراف معياري قدره 6،4 . اختبر صحة ادعاء الأطباء في صحة استعمال الدواء تحت مستوى معنوية 0،05

الحل:

دينا:، $n=49$, $S'=6{,}4$, $\mu_0=75$, $\bar{X}=65{,}5$

الفرضية العدمية أن استعمال الدواء لا يؤدي إلى انخفاض الضغط أي :75 = H_0: μ والفرضية البديلة الإحصائية أن استعمال الدواء يؤدي إلى خفض الضغط هي :H_1: $\mu<75$

بما أن المجتمع توزيعه مجهول و تباينه مجهول و حجم العينة كبير فإن الإحصائية Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث: $Z_t=-Z_{0.05}=-1{,}645$، بما أن الاختبار من جهة واحدة نحو اليسار ، نرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية أقل من القيمة الجدولية.

$$Z_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}=\frac{65{,}5-752{,}9}{\frac{6{,}4}{\sqrt{49}}}=-4{,}292$$

$$(Z_C=-4{,}92)<(Z_t=-1{,}645)\Rightarrow H_0 \quad True$$

ومنه فادعاء الأطباء صحيح بأن الدواء لع أعراض صحية فهو يسبب ارتفاع ضغط الدم .

ب) اختبارات توزيع ستودنت لمطابقة المتوسط

يعد اختبار ستودنت (T-test) من أشهر الاختبارات التي تندرج تحت أساليب الإحصاء الاستدلالي، ويرجع تطوير توزيع t-test و t"ستودنت" إلى أبحاث العالم الانجليزي ويليام سيلي جوسيت ، الذي نشرها في عام 1908 تحت اسم مستعار Student ولهذا سمى الاختبار به (Student's t-test).

يتميز توزيع t بأنه توزيع كمي مستمر وواحد من توزيعات المعاينة ، متوسطه = 0 وتباينه يقارب الواحد وهذه الخصائص تشبه خصائص توزيع z المعياري. ومن خصائصه أن منحناه متفلطح اكثر بقليل من منحنى التوزيع الطبيعي وهذا ما يميزه عن التوزيع الطبيعي المعياري.

افتراضات اختبار ستودنت t هي نفسها افتراضات اختبار التوزيع الطبيعي فاعتدال التوزيع شرط أساسي، تليها تجانس العينة ...الخ، ومع ذلك بالنسبة لاختبار t لا يكون تباين المجتمع شرط ، كما أن استخدامه يكون بنطاق واسع عندما يكون حجم العينة محصورا بين 5 و30، وفي حال تجاوز حجم العينة 30 فإن توزيع ستودنت يؤول و يقترب إلى توزيع الطبيعي .

أساسي : نظرية (2.4)

نستخدم اختبار ستودنت لمطابقة متوسط عينة المفترض μ_0 مع متوسط المجتمع μ أو لاختبار معنوية الفرق بين متوسط المجتمع و العينة معنوي باحتمال ثقة α، في حال كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، تباين المجتمع غير معلوم و حجم العينة أقل من 30 و أكبر من 5 . أو في حالة توزيع المجتمع مجهول(لكنه معتدل)وحجم العينة أقل من 30. حيث تكون الإحصائية المحسوبة والتي نرمز لها بـ T_C كما يلي :حسب نوع تباين العينة متحيز و غير متحيز على التوالي:

$$T_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1) \quad \text{أو} \quad T_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\sim t(n-1)$$

و التي تتبع توزيع ستودنت بمستوى معنوية α و بدرجة حرية n-1.

عليه لاتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية العدمية نستخدم إحدى الطرق التالية:

- باستخدام مجال الثقة : نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كان متوسط العينة المفترض μ_0 خارج مجال القبول :

$$\mu_0\notin[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}]$$

أو

$$\mu_0\notin[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}}]$$

و نقبل الفرضية العدمية في حال كانت μ_0 داخل مجال الثقة.

• باستخدام المقارنة بين قيمة الإحصائية t_C و القيمة الجدولية لها t_T في جدول توزيع ستودنت:

حيث نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت $t_C \notin [-t_{\frac{\alpha}{2}}, +t_{\frac{\alpha}{2}}]$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن هذا المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاهين(مستوى المعنوية يقسم إلى جزأين).

و نرفض الفرضية العدمية H_0 في حال كان الاختبار لاتجاه واحد :

إختبار من اليسار $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad |t_C| < (t_t = -t_\alpha)$

أو

إختبار من اليمين $H_1: \mu > \mu_0$ $\quad |t_C| > (t_t = t_\alpha)$

و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائية تكون ضمن المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاه واحد.

• باستخدام المعنوية: و هي أسهل طريقة في اتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية .حيث يتم مقارنة المعنوية المحسوبة P-Value مع مستوى المعنوية المعطى α فنقبل الفرضية العدمية H_0 إذا كانت P-Value>α و نرفضها في حال العكس.

مثال : رقم (7.4)

اختار باحث عينة عشوائية مكونة من 9 طلاب سنة ثانية علوم اقتصادية و أجرى لهم امتحانا في مقياس الإحصاء الاستدلالي و تم الحصول على الدرجات الآتية:14،18،20، 10،16،10،6،18،16

فهل يمكن اعتبار متوسط هذه العينة أعلى من المتوسط العام لجميع طلبة المرحلة الثانية البالغ 11،4 ، اختبر ذلك عند مستوى 0،05

الحل:

الفرضية العدمية: متوسط العينة يمثل المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية و البالغ 11،4 أي :

$H_0: \mu = 11{،}4$ والفرضية البديلة هي أن متوسط العينة أعلى من المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية البالغ 11،4 أي هي: $H_1: \mu > 11{،}4$

ومتوسط و انحراف العينة هما على التوالي:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{128}{9} = 14{,}22$$

$$S' = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{171{,}56}{8}} = 4{,}63$$

من خلال جدول الإحصائي نستخرج قيمة t الجدولية عند مستوى معنوية 0،05 و درجة الحرية حيث n-1=8 نجدها:

$t(\alpha{،}n-1)=t(0{,}05-8) = 1{,}86$

بالمقابل نقوم بحساب الإحصائية T_C و التي تأخذ الشكل التالي:

$$T_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} = \frac{14{,}22 - 11{,}4}{\frac{4{,}63}{\sqrt{9}}} = 1{,}83$$

$$(T_C = 1{,}83) < (t_t = 1{,}86) \Rightarrow H_0 \ \ True$$

نقبل الفرضية الصفرية التي تنص على أن متوسط العينة يمثل المتوسط العام لجميع طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية و البالغ 11،4

مثال : رقم (8.4)

أخذت عينة عشوائية حجمها 25 مفردة بانحراف معياري قدره 3 من مجتمع يتبع توزيع طبيعي وأردنا اختبار H_0 حيث

$\mu_0 = 60$ مقابل $H_1: \mu > 55$ على مستوى معنوية 0،01

الحل :

لدينا ، $S'=3,\ n=25,\ 60 = \mu_0,\ \bar{X} = 55$

بما أن المجتمع يتبع توزيع طبيعي و تباينه مجهول و حجم العينة أقل من 30 إذن الإحصائية تؤول لتوزيع ستودنت t ، وبما أن الاختبار في اتجاه اليمين نقوم بحساب قيمة التي الجدولية بـ $t_{(\alpha, n- \ , 24.)} = 1{,}341$

$t_{(0,01;1)}=$. فإذا كانت t الإحصائية المحسوبة أكبر من t الجدولية نرفض الفرضية العدمية و في حال العكس نقبل الفرضية العدمية.

و قيمة t الإحصائية المحسوبة هي:

$$T_C=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}=\frac{60-55}{\frac{3}{\sqrt{25}}}=8,33$$

$$(T_C=8,33)>(t_t=1,34)\Rightarrow H_0\quad Reject$$

2. اختبار مطابقة تباين مجتمع

يتناول هذا الجزء توزيع كاي تربيع . و الذي يتميز بأنه:

-ذو قيمة موجبة دائماً $\chi_v^2>0$ و هو ملتوي لليمين ؛

- متوسطه الحسابي n و تباينه هو 2n؛

- عندما يكون عدد درجات حرية n>30 فهو يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 0 و تباين 1 حيث يمكن إيجاد القيمة الحرجة للتوزيع كي تربيع في هذه الحالة وفقا للصيغة التالية :

$$\chi_\alpha^2=n[1-\frac{2n}{9}+Z_\alpha\cdot\{\sqrt{\frac{2n}{9}}\}]^3$$

سنحاول في هذا الجزء اختبار تباين المجتمع ، فمثلا أذا أراد مورد أن يتحقق من أن ألواح ألومنيوم لا يختلف سمكها عن 0،06 مليمتر يمكننا اختبار درجة الاختلاف باستخدام التباين و هو يعكس اختلاف القيم عن الوسط الحسابي ، و لقد توصل كارل بيرسون Karl Pearson إلى أن العينات التي تم سحبها من مجتمع ذو توزيع طبيعي(متوسط مجهول)، بانحراف معياري σ، فإن النسبة χ^2 تقترب إلى التوزيع كي تربيع بدرجة حرية n-1

أساسي : نظرية (3.4)

لدينا عينة عشوائية $x_1,x_2,x_3...x_n$ ، حجمها n من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي تباينه σ^2 غير معلوم ، و أردنا مطابقة تباين المفترض و الذي نرمز له بـ σ^2_0 مع تباين المجتمع σ^2 بمستوى معنوية α ، حيث تكون صيغة الاختبار على ثلاث أشكال : اختبار ذو اتجاهين $H_0: \sigma^2=\sigma^2_0$، $H_1:\sigma^2\neq\sigma^2_0$ أواختبار اتجاه اليمين $H_0: \sigma^2=\sigma^2_0$،$H_1: \sigma^2>\sigma^2_0$ أو اختبار ذو اتجاه اليسار $H_0: \sigma^2=\sigma^2_0$،$H_1: \sigma^2<\sigma^2_0$،

نستخرج قيمة التباين المقدر في الحالتين التاليتين :

الحالة الأولى : متوسط المجتمع معلوم $\widehat{\sigma_n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

الحالة الثانية : متوسط المجتمع غير معلوم

تباين العينة متحيز $S_n^2=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$

تباين العينة غير متحيز $\grave{S}_n^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2$

ومنه نستخرج قيمة الإحصائية المحسوبة (نرمز لها بـ χ^2_c)و التي تؤول لتوزيع كي تربيع بدرجة حرية n في حال كان متوسط المجتمع معلوم والى درجة حرية n-1 في حال كان متوسط المجتمع غير معلوم .

متوسط المجتمع غير معلوم $\chi_C^2=\frac{(n)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ **أو** $\chi_C^2=\frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$

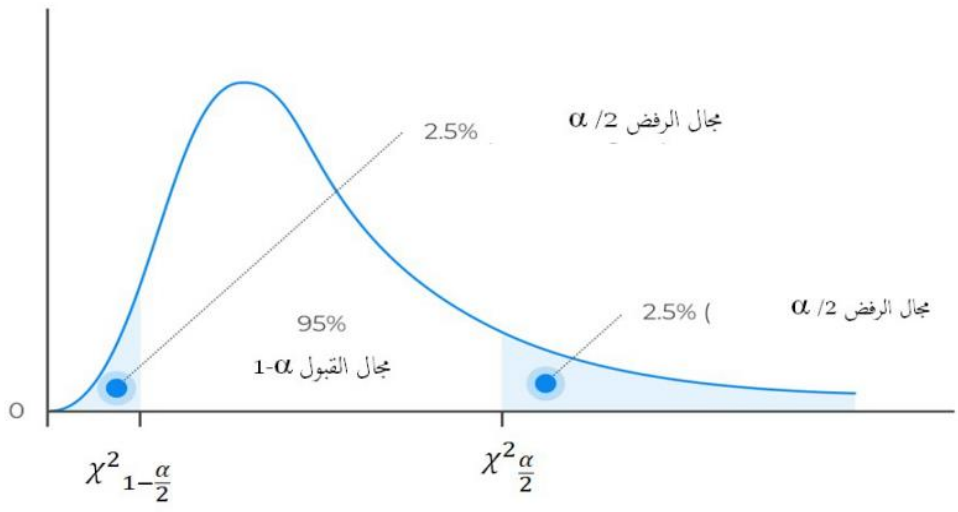
أو

متوسط المجتمع معلوم $\chi_C^2=\frac{(n)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{(n)}$

- حيث نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت كي تربيع المحسوبة خارج مجال القبول $\chi_c^2 \notin [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}]$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن هذا المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاهين .
- و نرفض الفرضية العدمية H_0 في حال كان الاختبار لاتجاه اليمين إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة أكبر من كي تربيع الجدولية $\chi_c^2 > (\chi_t^2 = \chi_\alpha^2)$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاه واحد.
- نرفض الفرضية العدمية في حال كان الاختبار ذو اتجاه اليسار إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة أقل من كي تربيع الجدولية $\chi_c^2 < (\chi_t^2 = \chi_{1-\alpha}^2)$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن المجال بالنسبة للاختبار ذو اتجاه واحد.

أما باستخدام طريقة المعنوية المحسوبة :(قيمة الإحصائية <المتغير العشوائي)P-VALUE=P، نرفض H_0 إذا كانت P-VALUE أقل من مستوى المعنوية و نقبلها إذا كانت أكبر أو تساوي من مستوى المعنوية.

مجال القبول و الرفض لاختبار تباين لمجتمع واحد ذو اتجاهين لمستوى معنوية 5%



مثال : رقم (9.4)

مصنع لبطاريات السيارات تدعي أن عمر البطاريات لها انحراف معياري 0،9 سنة و أخذت عينة حجمها 10 بطاريات ووجد أن الانحراف المعياري بها هو 1،2 سنة . اختبر فرضية $\sigma > 0,09$ مستخدما مستوى معنوية 0،05 .

الحل:

لدينا $n=10,\ S=1,2\ S^2=1,44\ \sigma^2=0,81$

نضع الفرضية العدمية: $H_0: \sigma^2 = 0،09$ مقابل الفرضية البديلة : $H_1: \sigma^2 > 0،09$

بما أن الاختبار ذو اتجاه اليمين فقيمة كي تربيع الجدولية هي: $\chi^2_T = \chi^2_{(n-1,\alpha)} = \chi^2_{(9-0,05)} = 16,92$ ، فنرفض الفرضية الصفرية إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة أكبر من قيمة كي تربيع الجدولية .

و قيمة كي تربيع الإحصائية هي:

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)1,44}{0,81} = 16$$

$$(\chi_C^2 = 16) < (\chi_t^2 = \chi^2_{(9،0,05)} = 16,92) \Rightarrow H_0 \quad True$$

و منه لا يوجد اختلاف بين انحراف المعياري لعمر البطاريات و هو 9،0 سنة.

مثال : رقم (10.4)

لوحظ أن الانحراف المعياري لمدة اشتغال المصابيح المنتجة في أحد المصانع بلغ 30 ساعة ، و بعد فترة من الزمن طلب مدير الإنتاج التأكد من أن تشتت مدة اشتغال المصابيح لم تتأثر بتقادم الآلات المستخدمة ، و عليه تم سحب عينة عشوائية حجمها 31 مصباح و تبين أن الانحراف المعياري بلغ 35 ساعة ، اختبر جودة المنتج (هل سيبقى بنفس الانحراف) عند مستوى معنوية 0،05

الحل :

لدينا

لدينا $n=31,\ S=35\ S^2=1225\ \sigma^2=900$

نضع الفرضية العدمية: $H_0: \sigma^2 = 900$ مقابل الفرضية البديلة : $H_1: \sigma^2 \neq 900$

بما أن الاختبار ذو اتجاه اتجاهين فقيمة كي تربيع الجدولية هي: الحد الأعلى $\chi^2_T=\chi^2_{(n-1\ ,\alpha/2)}=\chi^2_{(30\ -0,025)}=46,979$

و القيمة الدنيا هي $\chi^2_T=\chi^2_{(n-1\ ,1-\alpha/2)}=\chi^2_{(9\ -0,975)}=16,791$،

فنرفض الفرضية الصفرية إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة خارج مجال كي تربيع الجدولية.

و قيمة كي تربيع الإحصائية هي:

$$\chi^2_C=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(31-1)1225}{900}=40,833$$

$$(\chi^2_C=40,833\in[16,791\quad,\quad 46,979])\Rightarrow H_0\quad True$$

ومنه سيبقى المنتج بنفس الجودة 900ساعة .

مثال : رقم (11.4)

اختيرت عينة عشوائية قوامها 40 مشاهدة و تم حساب الانحراف المعياري للعينة و قد بلغ 15 , هل يمكن الاستنتاج بأن العينة المسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه أقل من 144، عند مستوى معنوية 0،05.

الحل:

لدينا ، $\alpha=0,05,\ n=40,\ S=15,\ S^2=225,\ \sigma_0^2=144$

نضع الفرضية العدمية: $H_0: \sigma^2 = 144$ مقابل الفرضية البديلة : $H_1: \sigma^2 < 144$

بما أن الاختبار ذو اتجاه واحد على اليسار فقيمة كي تربيع الجدولية تحسب انطلاقا من القانون التالي :

$$\chi^2_t=n[1-\frac{2n}{9}+Z_\alpha\cdot\{\sqrt{\frac{2n}{9}}\}]^3\ ,\ Z_{0,05}=1,645$$

$$\chi^2_t=40[1-\frac{2\times 40}{9}+1,645\cdot\{\sqrt{\frac{2\times 40}{9}}\}]^3=40\times(1,117)^3$$

$$\chi^2_t\simeq 55,76$$

فنرفض الفرضية الصفرية إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة أقل مجال كي تربيع الجدولية.و قيمة كي تربيع الإحصائية هي:

$$\chi^2_C=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(40-1)225}{144}=60,938$$

$$(\chi^2_C=60,938)>(\chi^2_t=55,76)\Rightarrow H_0\quad True$$

نستنتج بأن العينة المسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه مساوي لـ 144 عند مستوى معنوية 0،05.

3. اختبارات مطابقة النسبة

يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بخاصية ما (p)، حيث يؤكد الاختبار أو ينفي صحة فرضية معينة بخصوص قيمة p . يرمز للقيمة الافتراضية ب p_0 وتكتب الفرضية كما يلي: $H0\ :\ p\ =\ p_0$

للقيام بالاختبار نستخدم خصائص 'p النسبة في العينة

و تقدير النسبة في المجتمع هو الأخر يعتمد على نظرية الحد المركزي ، فتوزيع معاينة النسبة في العينة يمكن أن يقترب من التوزيع الطبيعي إذا كان حجم العينة $n>50$ ؛ $n(1-p)>20$ ؛و $np>20$

أساسي : نظرية (4.4)

إذا كانت قيم المشاهدات التالية $x_1,x_2,x_3...x_n$ ،لعينة عشوائية حجمها كبير $n>30$مسحوبة من مجتمع توزيعه ذو حدين متوسطه $\mu=np$ و وانحرفه $\sigma=\sqrt{p\times q\times n}$ وكانت نسبة النجاح $\hat{p}$ حيث $\hat{P}=\frac{X}{n}$ التي تقترب للتوزيع الطبيعي بمتوسط $E(\hat{P})=\mu_p=P$ وتباينه $V(\hat{P})=\sigma_p^2=\frac{pq}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$ وأردنا اختبار مطابقة النسبة في العينة $\hat{p}$ والتي نرمز لها بـ P_0مع النسبة في المجتمع P أي : $H_0: P=P_0$ مقابل $H_1: P\neq P_0$ أو $H_1: P<P_0$أو $H_1: P>P_0$. فإن إحصائية المحسوبة Z_C تؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري

حيث: $$Z_C=\frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0\cdot(1-P_0)}{n}}}$$

و لاتخاذ قرار رفض الفرضية العدمية نستخدم أحد الطرق الثلاثة يتم استخدام نفس طرق اتخاذ القرار في النظرية رقم (1،4)

بفرض أن الاختبار ذو اتجاهين $H_1: P\neq P_0$:

- استخدام مجال الثقة : نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت نسبة العينة المفترض μ_0 خارج مجال القبول :

$$\hat{P}\notin\left[P_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}\ ,\ P_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}\right]$$

و نقبل الفرضية العدمية في حال كانت μ_0 داخل مجال الثقة.

- باستخدام المقارنة بين قيمة الإحصائية Z_C و القيمة الجدولية لها Z_t في جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

حيث نرفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت $Z_C\notin[-Z_{\frac{\alpha}{2}},+Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ و نقبلها في الحالة العكسية أي الإحصائي تكون ضمن هذا المجال .

- باستخدام المعنوية: و نقبل الفرضية العدمية H_0 إذا كانت $P\text{-Value}>\alpha$ و نرفضها في حال العكس.

مثال : رقم (12.4)

إذا كانت نسبة المشتركين مستعملي الإنترنت بتكنولوجيا ADSL هي 0،8 ، درست عينة عشوائية بعد صدور تكنولوجيا جديدة للأنترنت FIBRE حجمها 200 شخص فوجد أن 170 منهم مشتركون بالأنترنت .
اختبر ما إذا كانت التكنولوجيا الجديدة ساعدت على زيادة المشتركين بالأنترنت بمستوى معنوية 0،05.

الحل :

لدينا: $n=200;\ X=170;\ P=0{,}8\ ;\ P_0=X/n=170/200=0{,}85$

الفرضية العدمية هي: $H_0: P=0{,}80$ و الفرضية البديلة الإحصائية: $H_1: P>0{,}8$

بما أن حجم العينة كبير ($n=200>50$؛ $n(1-P_0)=30>20$؛و $nP_0=170>20$) فأن توزيع النسبة يؤول للتوزيع الطبيعي المعياري ,

نقوم بحساب قيمة الإحصائية الجدولية في اتجاه واحد لليمين $Z_t=+1{,}64$

الإحصائية المحسوبة هي : $$Z_C=\frac{0{,}85-0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8\times0{,}2}{200}}}=1{,}8$$

و عليه نقوم باتخاذ القرار حسب الطرق التالية :

$$[P-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\quad,\quad P+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}]$$

الطريقة الأولى:
$$[0,80-1,64\cdot\sqrt{\frac{0,80(0,2)}{200}}\quad,0,80+1,64\cdot\sqrt{\frac{0,80(0,2)}{200}}]$$

$$P_0=0,85\notin[0,764\quad 0,836]\quad H_0\,is\,Rejected$$

الطريقة الثانية :نقوم بمقارنة الإحصائية المحسوبة مع الإحصائية المجدولة نجد(Z_C=1,8) >(Z_t=1,64) .
ومنه نرفض الفرضية العدمية و نقبل بالفرضية البديلة القائلة بأن استخدام تكنولوجيا الفيبر أدى إلى زيادة عدد مشتركي الأنترنت.

الطريقة الثالثة:

مقارنة بين حساب المعنوية المحسوبة P-Value والمعنوية المعطاة α=%5

P-Value =2(Z>1,8)=0,0359

نلاحظ أن: (P-Value (0,0350)<α(0,05 ومنه نرفض الفرضية العدمية .

مثــال : رقم (13.4)

يدعي صياد بأنه يصيب 75% من الطيور التي يطلق عليها النار، فإذا كان يوم ما قد أسقط 80 طيرا من أصل 120 طيرا ، اختبر صحة ادعاء الصياد بمستوى معنوية 0،05

الحل:

لدينا: $n=120;\ X=80;\ P=0,75\ ;\ P_0=X/n=80/120=0,67$

الفرضية العدمية هي: H_0: P = 0,75 و الفرضية البديلة الإحصائية:H_1: P ≠0,75

بما أن حجم العينة كبير (n=120>50 ؛ $n(1-P_0)=39,6>20$؛و $nP_0=80,4>20$ فـأن توزيـع النسـبة يـؤول للتوزيع الطبيعي المعياري ,

نقوم بحساب قيمة الإحصائية الجدولية [Z_t=[-1,96 ؛ +1,96لإتخاد القرار نقوم بمقارنة الإحصائية المحسوبة مع الإحصائية المجدولة (في هذا المثال اختبار ثنائي بمستوى معنوية 5%)

$$Z_C=\frac{P-P_0}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}=\frac{0,67-0,75}{\sqrt{\frac{(0,75)(0,25)}{120}}}=\frac{-0,18}{\sqrt{0,00156}}=4,5$$

$$(Z_C=4,5)\notin(Z_t=\mp1,96)\quad H_0\,is\,Rejected$$

تمرين

تقدر وزارة التشغيل نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في عامهم الأول التي تلي تخرجهم ب 70 % . وجدت دراسة أجريت على عينة من 900 طالب أن نسبة الحصول على عمل 67 % .
كيف يمكن اختبار ما إذا كانت النسبة صحيحة أم مبالغ فيها، بمستوى معنوية 5 %.

H0 : p = 0.70 ↔ H1 : p < 0.70

ب. اختبارات تجانس التباين

تمثل اختبارات التجانس خطوة أساسية في الاختبارات المعلمية للتوزيع الطبيعي و توزيع ستودنت

1. اختبار تجانس تباين مجتمع طبيعي واحد

يعتبر اختبار كي تربيع من أهم الاختبارات الإحصائية اللامعلمية فهو يستخدم لاختبار تجانس لتقدير واحد أو عدة تقديرات مستقلة لتباين مجتمع أو لاختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لمعاملات الارتباط البسيط .
وفي محاضراتنا سنتطرق إلى النوعين الأولين.

يعود الفضل الأول في اقتراح اختبار التجانس للعالم الانجليزي كارل بيرسون عام 1900، و يعد هذا الاختبار أحد الاستخدامات المهمة لتوزيع تربيع كاي الذي يهدف إلى بيان مدى مطابقة التكرار الملاحظة(Observed) لظاهرة معينة على أساس مشاهدات العينة نرمز لها Ok، مع التكرار المتوقع(Expected)) المقابل لتلك الظاهرة في مجتمع الدراسة نرمز لها Ek،

أساسي : نظرية رقم (5.4)

لغرض تطبيق اختبار حسن المطابقة نفترض أنه لدينا] $O_1,O_2,O_3,...O_n$[تمثل k من التكرارات الملاحظة(O_i) لظاهرة معينة على أساس مشاهدات العينة عند المستوى(i) من مستويات المتغير العشوائي(X) وأن [$E_1,E_2,E_3,...E_n$] مثل k من التكرارات المتوقعة (E_i) المقابلة لتلك الظاهرة عند نفس المستوى(i) حيث أن [i=1,2,3,...n]

و في ضوء ما تقدم ينبغي تحقق الشروط التالية قبل إجراء هذا الاختبار و هي :

1- أن يكون مجموع التكرارات الملاحظة (O_i) للظاهرة مساوي إلى مجموع التكرارات المتوقعة (E_i) ، أي أن:

$$\sum_i^k O_i=\sum_i^k E_i$$

2- أن لا يقل مجموع التكرارات المشاهدة $\sum_i^k O_i$ عن 50 خمسين مشاهدة ، نظراً لأن توزيع إحصاءه الاختبار(χ^2_c)قد اشتق للعينات الكبيرة .

3- يجب أن تكون مستويات المتغير العشوائي (X) مستقلة عن بعضها، بمعنى آخر ينبغي أن تنتمي كل مشاهدة لمستوى واحد فقط من مستويات المتغير العشوائي (X) عند إجراء عملية تفريغ المشاهدات.

و تتلخص خطوات الاختبار بما يلي:

- تحديد الفرضيات الإحصائية المطلوب اختبارها كالآتي:

H_0: لا توجد فروق جوهرية بين التكرارات الملاحظة(O_i) و التكرارات المتوقعة(E_i) عند مستوى(i)للمتغير العشوائي (X).

H_1: توجد فروق جوهرية بين التكرارات الملاحظة(O_i) و التكرارات المتوقعة(E_i) عند مستوى(i)للمتغير العشوائي (X).

- استخراج قيمة كي تربيع الجدولية (χ^2_t)من جدول توزيع بدرجة حرية $df=k-1-r$ (إذا كان عدد معلمات المجتمع غير مجهولة $r=0$) و مستوى معنوية α و مقارنتها مع قيمة كي تربيع المحسوبة

$$E_i=\frac{\sum O_i}{k}$$

حيث نقوم بحساب إحصائية الاختبار (χ^2_c) و فقا للصيغة التالية : و

$$\chi^2_C=\sum_i^k\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$$

فيتم رفض الفرضية العدمية H_0 إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة أكبر من أو تساوي قيمة كي تربيع الجدولية($\chi^2_c>\chi^2_t$) أي وجود فروق روق جوهرية بين التكرارات الملاحظة(O_i) و التكرارات المتوقعة(E_i) عند مستوى(i)للمتغير العشوائي (X) عند مستوى معنوية α. و العكس صحيح.

مثال : رقم (11.4)

نفرض أن باحثا سأل 48 طالب في السنة أولى جدع مشترك لكلية الاقتصاد عن نوع التخصص الذي يرغبون في دراسته فجاءت النتائج كما يلي:

التخصص	عدد الملاحظات *f*
محاسبة و مالية	15
إدارة أعمال	2
تسويق	27
اقتصاد نقدي و بنكي	4
المجموع	48

الحل:

$,k=4, \sum O_i=48$

H_0: لا توجد فروق جوهرية بين التكرارات الملاحظة(O_i) و التكرارات المتوقعة(E_i) عند مستوى(i)للمتغير العشوائي (X).(أي متجانسة)

H_1: توجد فروق جوهرية بين التكرارات الملاحظة(O_i) و التكرارات المتوقعة(E_i) عند مستوى(i)للمتغير العشوائي (X).(غير متجانسة)

نقوم أولا بحساب التكرارات المتوقعة: $E_i= \sum O_i/k= 48/4=12$

تم نستخرج قيمة كي تربيع الجدولية بدرجة حرية $df=k-1=4-1=3$و مستوى معنوية 0،05 و هي : $\chi^2_t=$ 7,8147 و نقارنها كي تربيع المحسوبة (χ^2_C)

التخصص	O_i	(Oi-Ei)	$(Oi-Ei)^2$
محاسبة و مالية	15	3	9
إدارة أعمال	2	10-	100
تسويق	27	15	225
اقتصاد نقدي و بنكي	4	8-	64
المجموع	48	/	398

$$\chi^2_C=\sum_i^k \frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=\frac{398}{12}=33,17$$

$$(\chi^2_C=33,17)>(\chi^2_t=7,8147)\Rightarrow H_0 is\ Rejected$$

ومنه هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين التخصصات في اختيار التخصصات الأربعة . ومنه فالعينة غير ممثلة للمجتمع.

مثال : رقم (12.4)

سحبت عينة عشوائية من 33 عميل من مدينة الأغواط لمعرفة تفضيلاتهم بالنسبة للأنواع المختلفة من السيارات فتم الحصول على النتائج الأتية :

نوع السيارة	هيونداي	دايو	تويوتا	مازدا	كيا	مرسيدس	المجموع
عدد العملاء	8	7	3	5	6	4	33

هل هذه العينة تعكس تفضيلات العملاء في المجتمع بالنسبة للأنواع المختلفة للسيارات أم لا ؟ أو بمعنى آخر هل هذه العينة تكون ممثلة أو مشابهة للمجتمع أم لا بمستوى معنوية $\alpha = 5\ \%$ ؟

الحل:

$k=6, \sum O_i=33$

نستخرج الفرضيات حيث:الفرضية العدمية H_0: العينة ممثلة للمجتمع . الفرضية البديلة H_1: العينة غير ممثلة للمجتمع .

نقوم بحساب الملاحظات المتوقعة $E_i= \sum O_i/k= 33/6=5،5$

نستخرج قيمة كي تربيع الجدولية بدرجة حرية $df=6-1=5$ و بمستوى معنوية 0،05 و هي : $\chi^2_t=11,07$ 05 و نقارنها كي تربيع المحسوبة (χ^2_C)

جدول1 ويمكن توضيح كيفية تطبيق قانون الإحصائية من خلال الجدول الآتي :

نوع السيارة	هيونداي	دايو	تويوتا	مازدا	كيا	مرسيدس	المجموع
O_i	8	7	3	5	6	4	33
E_i	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	/
(Oi-Ei)	2,5	1,5	2,5-	0,5-	0,5	1,5-	
$(Oi-Ei)^2$	6,25	2,25	6,25	0,25	0,25	2,25	17,5

$$\chi_C^2 = \sum_i^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{17,5}{5,5} = 3,18$$

$$(\chi_C^2 = 3,18) < (\chi_t^2 = 11,0705) \Rightarrow H_0 \quad is\, accepted$$

نقبل الفرض العدمية القائلة بأن العينة تكون ممثلة أو مشابهة للمجتمع , وهذا يعنى أن هذه العينة تعكس تفضيلات العملاء في المجتمع بالنسبة للأنواع المختلفة للسيارات .

2. اختبار فيشر لتجانس تبايني مجتمعين

سمي توزيع فيشر بهذا الاسم تخليدا للعالم رونالد فيشر R.A. Fisher الذي يعتبر أول من اشتق هذا التوزيع ووصفه وذلك في الثلاثينات من القرن العشرين ويستخدم توزيع F أساسا لاختبار تساوي تبايني مجتمعين و لاختبار تساوي ثلاث متوسطات أو أكثر(بما يعرف بتحليل التباين Analysis of Variance).

الأساس النظري لاشتقاق توزيع فيشر هو في الحقيقة توزيع مشتق من نسبة توزيعين مستقلين كل منهما عبارة عن توزيع كاي تربيع مقسوما على درجة حرية df .

و على افتراض انه لدينا متغير عشوائي أول يخضع للتوزيع كي تربيع بدرجة حرية n_1-1

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1 - 1)\times S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{n_1-1}^2$$

وكان لدينا متغير عشوائي ثاني يخضع لتوزيع كي تربيع بدرجة حرية n2-1 $\chi_2^2 = \frac{(n_2 - 1)\times S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2-1}^2$

يمكن الحصول على المتغير العشوائي F من خلال النسبة بين التوزيعين مقسوما كل منهما على درجات حريته :

$$F = \frac{\frac{(n_1-1)\times S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ n_1 - 1}{\frac{(n_2-1)\times S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ n_2 - 1}$$

و منه سيعتمد توزيع فيشر على نوعين من درجات الحرية للبسط و المقام

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$$

و لاختبار تساوي تبايني مجتمعين يجب توفر الشروط التالية :

1. العينات عشوائية ومستقلة.
2. مجتمعات هذه العينات كلاً لها توزيع طبيعي.أو لها توزيع ذو منوال واحد وحجم العينات متساوي تقريبا.

أساسي : نظرية رقم (6.4)

ليكن S^2_1 تباين غير متحيز لعينة عشوائية $X_1,X_2,....X_{n_1}$ حجمها n_1 من مجتمع طبيعي (μ_1,σ^2_1) و لليكن S'^2_2 تباين غير متحيز لعينة عشوائية $Y_1,Y_2,....Y_n$ حجمها n_2 من مجتمع طبيعي (μ_2,σ^2_2) مستقل عن الأول. نريد اختبار تجانس تباين العينتين فنكتب الفرضية العدمية: $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ أو $H_0 : \sigma^2_1 / \sigma^2_2 = 1$

ونكتب الفرضيه البديلة :

(في حالة الاختبار الثنائي)كما يلي: $H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$ أو $H_1 : \sigma^2_1 / \sigma^2_2 \neq 1$

في حال اختبار من اتجاه واحد إلى اليمين : $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ أو $H_1 : \sigma^2_1 / \sigma^2_2 > 1$

في حال الاختبار من اتجاه واحد إلى اليسار : $H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$ أو $H_1 : \sigma^2_1 / \sigma^2_2 < 1$

نقوم بحساب قيمة فيشر الجدولية F_t بمستوى معنوية α و $1-\alpha$ في حال كان الاختبار باتجاه واحد وبمستوى معنوية $\alpha/2$ و $1-\alpha/2$ في حال كان الاختبار ذو اتجاهين و بدرجتي حرية n_1-1 و n_2-1 و نقارنها مع إحصائية فيشر المحسوبة F_C،و التي تعطى بالعلاقة التالية :

$$F_C = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F^{(1-\frac{\alpha}{2}\ ,\ \frac{\alpha}{2})}_{(n_1-1\ ,\ n_2-1)}$$

أو

$$F_C = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F^{(1-\alpha\ ,\ \alpha)}_{(n_1-1\ ,\ n_2-1)}$$

نرفض الفرضية العدمية في الاختبار ذو الاتجاهين $H_1 : \sigma^2_1 / \sigma^2_2 \neq 1$ إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة خارج مجال القبول أي $F_C \notin [F^{(1-\frac{\alpha}{2}\ ,\ \frac{\alpha}{2})}_{(n_1-1\ ,\ n_2-1)}]$

أما في حال اختبار من اتجاه واحد إلى اليمين $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ فنرفض الفرضية العدمية إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة أكبر من قيمة فيشر الجدولية $F_C>F_t=F^{\alpha}_{n1-1,\ n2-1}$

في حال الاختبار من اتجاه واحد إلى اليسار فنرفض الفرضية العدمية $H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$ إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة أقل من قيمة فيشر الجدولية $F_C<F_t=F^{1-\alpha}_{n1-1,\ n2-1}$

ملاحظة

لتسهيل الحسابات تم تصميم جدول توزيع فيشر F بحيث يكون المجتمع الأول لصاحب التباين الأكبر (لذلك نرقم المجتمعين بحيث يكون $S^2_1>S^2_2$ و نعدل H_0 و H_1 حسب ذلك الترقيم)

مثال : رقم (13.4)

لمقارنة نوعين من الدواء لعلاج مرض معين من حيث الفترة الزمنية التي يستغرقها الدواء لتسكين الألم أعطي الدواء الأول لعينة تتكون من 16 شخصا والدواء الثاني لعينة تتكون من 13 شخصا، فكان تباين العينة الأولى 64 بينما تباين العينة الثانية 49 .

من هذه المعلومات هل يمكن القول بوجود فرق معنوي بين تبايني المجتمعين عند مستوى المعنوية 0،05؟

الحل:

لدينا $n_1=16;\ S^2_1=64,\ n_2=13;\ S^2_2= 49$

نضع الفرضيات فتكون الفرضية العدمية: $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ و الفرضية البديلة : $H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$

قوم بحساب قيمة فيشر الجدولية F_t بمستوى معنوية 0،025و 0،975 بدرجتي حرية $n_1-1 =15$ و $n_2-1=12$

فنجد أن مجال فيشر الجدولية محصور بين قيمتي التاليتين : $F^{0,025}_{15,12}=0,337$ و $F^{0,975}_{15,12}=3,18$

و نقارنها مع إحصائية فيشر المحسوبة F_C و هي $F_C=64/40 =1,3$

و بمقارنة قيمة فيشر المحسوبة نجدها ضمن مجال قيمة فيشر الجدولية ومنه نقبل الفرضية العدمية القائلة بتجانس تباين العينتين بمستوى معنوية 0،05.

مثال : رقم (14.4)

من مجتمع طبيعي التوزيع سحبت عينة عشوائية بحجم 15 بلغ تباينها 36 ،و من مجتمع آخر توزيعه طبيعي سحبت عينة حجمها 18 بتباين 25 ، فهل تباين المجتمع الأول أكبر من تباين المجتمع الثاني بمستوى معنوية 10%

الحل:

لدينا $n_1=15;\ S^2_1=36,\ n_2=18;\ S^2_2=25$

نضع الفرضيات فتكون الفرضية العدمية: $H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$ و الفرضية البديلة : $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$

قوم بحساب قيمة فيشر الجدولية F_t بمستوى معنوية 0،005 بدرجتي حرية $n_1-1 = 14$ و $n_2-1=17$

فنجد أن قيمة فيشر الجدولية هي : $F^{0,005}_{14,17}=1,91$ و نقارنها مع إحصائية فيشر المحسوبة F_C و هي $F_C=36/25 =1,44$

فنجدها قيمة فيشر المحسوبة أقل من قيمة فيشر الجدولية ومنه نقبل الفرضية العدمية القائلة بتجانس تباين المجتمعين بمستوى معنوية 0،1.

3. اختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع (اختبار بارتليت)

يعد اختبار تجانس عدة تقديرات مستقلة لتباين المجتمع σ^2من الاختبارات الاحصائية التي تستخدم في اختبار أن القيم المستقلة لتباين العينة S^2_iهي التقديرات متجانسة لتباين المجتمع(عدم وجود فرق معنوي بين قيم تباين العينات و تباين المجتمع) على أساس k من العينات و هو معرف باختبار bartlett test

أساسي : نظرية رقم (7.4)

نفرض أن لدينا k من القيم المستقلة لتباين العينة $[S^2_1, S^2_2,....S^2_K]$ و التي تمثل تقديرات لتباين المجتمع σ^2 محسوبة على أساس k من العينات ذات أحجام مختلفة كل منها هو n_i حيث أن (i=1,2,...K) علما أن هذا الاختبار يكون من الجانب الأيمن فقط و تتلخص خطوات هذا الاختبار فيما يلي:

1- نقوم بتحديد الفرضية العدمية H_0: $\sigma^2= S^2_1= S^2_2=....S^2_K$تجانس كل تباينات العينات مع تباين المجتمع

و الفرضية البديلة H_1: $\sigma^2\neq S^2_1\neq S^2_2\neq....S^2_K$: عدم تجانس على أقل تباين العينة واحدة مع تباين المجتمع ، أو عدم تجانس تباين العينات مع تباين المجتمع.

2- استخراج قيمة كي تربيع الجدولية (χ^2_t) بمستوى معنوية α وبدرجة حرية df=k-1 و مقارنتها مع الإحصائية الاختبار كي تربيع المحسوبة (χ^2_C) و التي تعطى بالعلاقة التالية :

$$\chi^2=\frac{\sum_i^k (n_i-1)\cdot\ln\left(S^2/S_i^2\right)}{\{1+\frac{1}{3(K-1)}*[\sum_i^k(\frac{1}{n_i-1})-\frac{1}{\sum_i^k(n_i-1)}]\}}$$

حيث أن:

$$S^2=\frac{\sum_i^k(n_i-1)\cdot S_i^2}{\sum_i^k(n_i-1)}$$

و تمثل

ni: حجم العينة لرقم i؛

k: عدد العينات ؛

Ln: لوغاريتمي الطبيعي .

3- يتم رفض الفرضية العدمية إذا كانت قيمة كي تربيع المحسوبة (χ^2_C) أكبر من أو تساوي قيمة كي تربيع الجدولية (χ^2_t) أي (χ^2_t) <(χ^2_C)

مثال : رقم (15.4)

أجريت ثلاث دراسات إحصائية مستقلة للتعرف على طبيعة العلاقة بين دخل الأسر الشهري و مقدار الإنفاق الشهري على السلع الغذائية و الخدمات الأساسية ، و قد تم الحصول على المعلومات موضحة في الجدول أذناه:

الدراسة	حجم العينة	تباين الانفاق
الأولى	30	190
الثانية	25	210
الثالثة	35	240

المطلوب: هل يمكن الاستدلال بأن عينات الأسر للدراسات الثلاث أعلاه مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينة σ^2 عند مستوى معنوية 0،01

الحل :

لدينا: $\sigma^2= \sum(n_i-1)S^2_i/\sum(n_i-1)=18710/87=215{,}057;\ S^2_1=190,\ n_1=30;\ S^2_2=210,\ n_2=25;\ S^2_3=240,\ n_3=35;\ K=3$

1-نضع الفرضيات التالية:

الفرضية العدمية H_0: $\sigma^2= S^2_1= S^2_2=S^2_3$ تجانس كل تباينات العينات مع تباين المجتمع.

و الفرضية البديلة H_1: $\sigma^2\neq S^2_1\neq S^2_2\neq S^2_3$ عدم تجانس على أقل تباين العينة واحدة مع تباين المجتمع .

2- نستخرج قيمة كي تربيع الجدولية بمستوى معنوية 0،01 و بدرجة حرية 2= df=k-1-r =3-1-0 و هي χ^2_t =9,21: و نقارنها بقيمة كي تربيع المحسوبة و هي :

الدراسة	$S^2{}_i$	n_i	(n_i-1)	$1/(n_i-1)$	$(n_i-1)S_i^2$	$Ln(S^2/S^2_i)$	$Ln(S^2/S^2_i)(n_i-1)$
1	190	30	29	0,034	5510	0,124	3,596
2	210	25	24	0,042	5040	0,024	0,576
3	240	35	34	0,029	8160	0,110-	3,740-
المجموع	_	90	87	0,105	18710	_	0,432

$$\chi^2_C=\frac{\sum_1^3 (n_i-1)\cdot\ln(215{,}057/S_i^2)}{\{1+\frac{1}{3(3-1)}*[(0{,}105)-\frac{1}{87}]\}}$$

$$\chi^2_C=\frac{0{,}432}{1{,}016}\approx 0{,}425$$

$$(\chi^2_C=0{,}425)<(\chi^2_t=9{,}21)\quad \Rightarrow H_0\, is\, True$$

ومنه نستنتج أن عينات للدراسات الثلاثة متجانسة مع تباين المجتمع الطبيعي بمستوى معنوية 0،01

مثال : رقم (16.4)

من أجل دراسة تأثير نوع من الغذاء على زيادة وزن الأبقار ، تم سحب ثلاث عينات عشوائية من ثلاث مزارع و بعد الانتهاء مدة التجربة تم ملاحظة زيادة أوزان الأبقار بتباينات التالية ف:

المزارع	حجم العينة	تباين الأوزان
الأولى	4	1,583
الثانية	6	2,3
الثالثة	5	2,7

المطلوب : اختبر معنوية الفرق بين بيانات العينات الثلاث بمستوى معنوية 0،05

الحل :

دينا: $\sigma^2= \sum(n_i-1)S^2_i/\sum(n_i-1)=27,049 /12=2,25$; $S^2_1=1,583$, $n_1=4$; $S^2_2=2,3$, $n_2=6$; $S^2_3=2,7$, $n_3=5$; $K=3$

1-نضع الفرضيات التالية:

الفرضية العدمية H_0: $\sigma^2= S^2_1= S^2_2=S^2_3$ تجانس كل تباينات العينات مع تباين المجتمع.

و الفرضية البديلة H_1: $\sigma^2\neq S^2_1\neq S^2_2\neq S^2_3$: عدم تجانس على أقل تباين العينة واحدة مع تباين المجتمع .

2- نستخرج قيمة كي تربيع الجدولية بمستوى معنوية 0،05 و بدرجة حرية 2 $df=k-1-r =3-1-0 =2$ و هي: $\chi^2_t =5,991$ و نقارنها بقيمة كي تربيع المحسوبة (نقوم بنفس خطوات المثال السابق)و هي $\chi^2_c =0,217$

و نجد أن $(\chi^2_t =5,991) > (\chi^2_c =0,217)$ ومنه نقبل الفرضية العدمية أي المجتمعات لها نفس التباين ومتجانسة مع تباين المجتمع عند مستوى معنوية 0،05.

ت. اختبارات الملائمة للقانون التوزيع(أو جودة التوافق)

يمكن أن نميز نوعين من الاختبارات التوافق لقانون التوزيع، الأولى كمية منها اختبار كي تربيع لبيرسون واختبار كولموغوروف سميرنوف، اختبار

(Q- Q) للكميات ، اختبار (P- P) للاحتمالات ،اختبار رومانوفسكي(Romanovsky) ....الخ و الثانية اختبارات للرسومات كاختبار هنري " Droite de Henry" و اختبار باومن" Test Jarque-Bera و(test de Bowman Shelton" سنتطرق في محاضراتنا إلى الاختبار كي تربيع للتوافق.

يستخدم اختبار جودة التوافق لبيرسون لكي تربيع كاختبار معلمي للفرضيات المتعلقة بالظواهر التي ليس لها نوع محدد من التوزيعات الاحتمالية المعروفة ، أو اختبار الظواهر التي تخضع للتوزيعات المنفصلة (ثنائي الحد، بواسون ...إلخ) أو التوزيعات الاحتمالية المتصلة(كالتوزيع الطبيعي، التوزيع الأسي...إلخ)

أساسي : رقم (8.4): اختبار كي تربيع لجودة التوافق

يسمح لنا اختبار كاي تربع باختبار توزيع المجتمع المجهول U للمتغير العشوائي X .حيث يجب أن تكون العينة مسحوبة بطريقة العشوائية بسيطة و حجمها أكبر من 50 ويكون مستوى الدلالة {α } ثابت قبل جراء الاختبار.

و ليكن لدينا عددا k من الخصائص المتنافية أو عدد فئات جدول التوزيع التكراري للظاهرة، نسبة تحقق كل منها في المجتمع p_i حيث $\sum P_I =1$ نريد اختبار توافق توزيع العينة مع توزيع معطي فنفرض تساوي عدد المشاهدات التجربة O_i مع المشاهدات المتوقعة E_i و عليه نكتب الفرضية العدمية بالشكل التالي H_0: $X \sim U(\theta)$ أي العينة المسحوبة تتبع التوزيع U للمعلمة θ، أما الفرضية البديلة فنكتب: H_1: $X \nsim U(\theta)$ أي العينة المسحوبة لا تتبع التوزيع U للمعلمة θ

نقوم بمقارنة كي تربيع الجدولية بمستوى معنوية α و بدرجة حرية K-1، و نقارنها بقيمة كي تربيع المحسوبة والتي تعطى بالعلاقة التالية :

في حالة التوزيعات المنفصلة : $$\chi^2_C=\sum_{i=1}^{K}\frac{\left(|O_i-E_i|-\frac{1}{2}\right)^2}{E_i}\sim\chi^2_{(K-1)}$$

في حالة التوزيعات المستمرة: $$\chi^2_C=\sum_{i=1}^{K}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\sim\chi^2_{(K-1)}$$

في حال كان كي تربيع المحسوبة أكبر من كي تربيع الجدولية أذن نرفض الفرضية العدمية و نقبل الفرضية البديلة .و في حال العكس أي كي تربيع المحسوبة أقل من قيمة كي تربيع الجدولية نقبل الفرضية العدمية و نرفض الفرضية البديلة.

مثال : (17.4)

تمثل البيانات التالية عينة عشوائية حجمها n=100 لأطوال الطلبة بـ(سم)

فئات الطول	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	المجموع
التكرار	10	20	40	20	10	100

المطلوب: هل يمكن استنتاج بأن بيانات التوزيع التكراري تخضع للتوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية 0،05.

الحل:

نضع الفرضيات الإحصائية التالية:

H_0: بيانات التوزيع التكراري تخضع للتوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية 0،05.

H_1: بيانات التوزيع التكراري لا تخضع للتوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية 0،05.

نقوم بحساب كي تربيع الجدولية لدرجة حرية df=5-1=4 بمستوى معنوية 0،05 و هي :و هي : $\chi^2_t=9,$ 488 ونقارنها كي تربيع المحسوبة (χ^2_c)

لحساب الإحصائية الاختبار ر (χ^2_c) و فقا للمراحل التالية :

1- حساب المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري للعينة:

$$\bar{X}=\frac{\sum F_i \cdot X_i}{\sum F_i}=\frac{16500}{100}=165$$

$$S'=\sqrt{\frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sum F_i-1}}=\sqrt{\frac{12000}{99}}=11$$

2-حساب الدرجات المعيارية للحدود الفئات (الدنيا و العليا كلها) ثم إيجاد القيم الاحتمالية الموافقة لها من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري (مثلا الفئة الأولى)

$$Z=\frac{X-\bar{X}}{S'}, \quad \bar{X}=165, \quad S'=11$$

$$Z_1=\frac{140-165}{11}=-2,27 \Rightarrow P(Z_1)=0,116$$ باقي الفئات موجودة في الجدول أدناه.

$$Z_2=\frac{150-165}{11}=-1,36 \Rightarrow P(Z_2)=0,0869$$

3_إعادة حساب التكرارات المتوقعة المقابلة لفئات التوزيع وفقا للصيغة الأتية* $E_i=nP$

حيث n: تمثل مجموع تكرارات التوزيع

P*: تمثل الفرق بين القيمة الاحتمالية للحد الأعلى و الحد الأدنى للفئة و الجدول التالي يوضح آلية حساب التكرارات المتوقعة E_i

حدود الفئات	الدرجات المعيارية للحد الأدنى	الدرجات المعيارية للحد الأعلى	القيم الاحتمالية للحد الأعلى	القيم الاحتمالية للحد الأدنى	الفرق بين احتمال الأعلى و الأدنى *P	التكرارات المتوقعة E_i
150-140	2,27-	1,36-	0,0116	0,0869	0,0753	8
160-150	1,36-	0,45-	0,0869	0,3264	0,2395	24
170-160	0,45-	0,45	0,3264	0,6736	0,3472	35
180-170	0,45	1,36	0,6736	0,9131	0,2395	23
190-180	1,36	2,27	0,9131	0,9884	0,07537	8
200-190	2,27	3,18	0,9884	0,9993	0,0109	1
المجموع	/	/	/	/	1	100

قمنا بإضافة فئة وهمية لضمان مجموع الاحتمالات مساوي للواحد ، ثم نقوم بإضافة تكرار الفئة الوهمية إلى الفئة الأخيرة و نقوم بإعادة صياغة الجدول مع حساب التكرارات المتوقعة للتوزيع الطبيعي و حساب الإحصائية .

حدود الفئات	التكرارات الملاحظة O_i	التكرارات المتوقعة E_i	(E_i-O_i)	$(E_i-O_i)-2/1$	$(E_i-O_i)-2/1\ ^2$	$(E_i/^2(E_i-O_i$
140-150	10	8	2	1,5	2,25	0,28125
150-160	20	24	4	3,5	12,25	0,667
160-170	40	35	5	4,5	20,25	0,714
170-180	20	24	4-	3,5	12,25	0,667
180-190	10	9	1	0,5	0,25	0,111
المجموع	100	100	/	/	/	2,659

بما أن قيمة كي تربيع المحسوبة $\chi^2_c=2,659$ أقل من قيمة كي تربيع الجدولية أي $\chi^2_t=9,488$ ($\chi^2_c=9,488)<\chi^2_t=2,659$ ومنه قبول الفرضية العدمية أي أن توزيع البيانات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره 165 و تباين قدره 121 سم ، عند مستوى معنوية 0،05.

مثال : (18.4)

أجرى قسم الوقاية من فيروس كورونا بعض الفحوصات المخبرية على عينة مكونة من 500 شخص ، و قد أسفرت النتائج الفحص المخبري عن ملاحظة أنواع من الفيروسات التاجية ، حيث الجدول التالي يلخص نتائج الفحص المخبري:

عدد الفيروسات التاجية	0	1	2	3	4	5	6	المجموع
عدد الأشخاص	50	150	210	50	20	12	8	500

المطلوب: هل يمكن استنتاج بأن البيانات تخضع للتوزيع بواسون ، عند مستوى معنوية 0،01.

الحل :

نضع الفرضيات الإحصائية التالية:

H_0: بيانات التوزيع التكراري تخضع للتوزيع بواسون عند مستوى معنوية 0،01.

H_1: بيانات التوزيع التكراري لا تخضع للتوزيبواسون عند مستوى معنوية 0،01.

نقوم بحساب كي تربيع الجدولية لدرجة حرية $df=6-1=5$ بمستوى معنوية 0،01 و هي :و هي : $\chi^2_t=1$ 6,812 ونقارنها كي تربيع المحسوبة (χ^2_c)

لحساب الإحصائية الاختبار (χ^2_c) و وفقا للمراحل التالية :

1- حساب المتوسط الحسابي للعينة:

$$\bar{X}=\lambda=\frac{\sum F_i \cdot X_i}{\sum F_i}=\frac{908}{500}=1,816$$

2-حساب القيم الاحتمالية P بالاعتماد على المتوسط الحسابي للعينة و معادلة توزيع بواسون (مثلا القيمة الأولى $x=0$):

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}, \quad x=1,2,\ldots 6$$

$$P(X=0)=\frac{(1,816)^0 \cdot e^{-1,816}}{0!}=0,163$$

و بنفس الأسلوب يتم حساب القيم الأخرى للمتغير العشوائي x

كما هو موضح في الجدول أذناه.

عدد الفيروسات	التكرارات الملاحظة O_i	القيم الاحتمالية	التكرارات المتوقعة E_i	(O_i-E_i)	$(O_i-E_i)-1/2$	$(O_i-E_i)-1/2^2$	$O_i-(E_i)^2/E_i$
0	50	0,163	81,5	31,5-	31	961	11,79
1	150	0,296	148	2	1,5	2,25	0,015
2	210	0,269	134,5	75,5	75	5625	41,82
3	50	0,163	81,5	31,5-	31	961	11,79
4	20	0,074	37	17-	16,5	272,25	7,36
5	12	0,027	13,5	1,5-	1	1	0,027
6	8	0,008	4	4	3,5	12,25	3,0625
المجموع	500	1	500	0	0		75,8645

بما أن قيمة كي تربيع المحسوبة $\chi^2_c=75,8645$ أكبر من قيمة كي تربيع الجدولية أي $\chi^2_t=16،812$
$\chi^2_t=16,812$>($\chi^2_c=75,8645$) ومنه رفض الفرضية العدمية أي أن توزيع البيانات لا يخضع لتوزيع بواسون وفق معطيات هذا التوزيع ، عند مستوى معنوية 0،01.

ث. اختبارات الفروق بين معلمتي مجتمعين

سنتناول في هذا الجزء اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين ، اختبار الفرق بين نسبتي مجتمعين واختبار الفرق بين تبايني مجتمعين .

1. اختبار الفرضيات للفرق بين متوسطين

هناك الكثير من المواقف التي نرغب فيها بإجراء مقارنة بين مجتمعين. مثلا المقارنة بين أداء الذكور وأداء الإناث.و يمكن أن نميز في هذه الحالة نوعين من البيانات : وهما البيانات المستقلة independent والبيانات المرتبطة أو غير المستقلة dependent حيث أن لكل منهما أسلوبه الخاص في التحليل الإحصائي.

ويقصد بالعينات مستقلة أي أنها مسحوبة من مجتمعات مختلفة بحيث أن مشاهدات العينة الأولى لا تؤثر في مشاهدات العينة الثانية. مثل حجم الإنتاج في الفرع الأول وحجم الإنتاج في الفرع الثاني لمؤسسة صناعية.وبالتالي فان متوسط العينة الأولى في المثالين السابقين (متوسط الذكور، ومتوسط حجم الإنتاج في الفرع الأول) مستقل عن متوسط العينة الثانية (متوسط الإناث، ومتوسط الإنتاج في الفرع الثاني).

ا) اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يعتمد الاختبار الإحصائي الذي يستخدم لاختبار الفرق بين متوسط مجتمعين مستقلين على:

- حجم العينتين ؛
- هل المجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي أم لا؟
- هل تباين المجتمعين معروف أم لا؟
- هل تباين المجتمعين متساويان أم لا؟

أما في حالة ما إذا كان المجتمعان لا يتبعا التوزيع الطبيعي و التباين غير معلوم و حجم العينة ليس كبيرا ، فلا يمكن استخدام نظرية النهاية المركزية، بل يتم استخدام الاختبارات اللامعلمية(مثل اختبارات الإشارة، إختبار مان وتني، اختبار كروسكال والاس....الخ).

1 اختبارات الفرق بين متوسطى مجتمعين مستقلين

نميز بين حالتين:

- الأولى مجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي مستقلان تباينهما معلوم فإحصائية الفرق تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري

- الثانية مجتمعان لا يتبعان التوزيع الطبيعي تباينهما معلوم و حجمهما كبير (<30) فتؤول إحصائيه الفرق إلى توزيع الطبيعي المعياري باستخدام نظرية النهاية المركزية .

في كلتا الحالتين نستخدم نفس الخطوات حسب النظرية أذناه.

أساسي : رقم (9.4)

إذا كانت X_1 عينة عشوائية حجمها n_1مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي($N(\mu_1, \sigma_1^2)$متوسطه μ_1 و تباينه σ^2_1 وكانت عينة ثانية عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي($N(\mu_2, \sigma_2^2)$ولتكن X_2 حجمها n_2 مستقلة عن المجتمع الأول متوسطه μ_2 و تباينه σ^2_2 ، مع العلم أن تبايني المجتمعين غير متساويين $\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$ فإحصائية فرق متوسطي المجتمعين $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ مقدار غير متحيز للفرق بين مجتمعين μ_1-μ_2 هو متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي متوسطة μ_1-μ_2 و تباينه($Var(\sigma_1-\sigma_2$.

نريد اختبار فرق متوسطي المجتمعين

فتكون الفرضية العدمية H_0 عدم وجود فروق دو دلالة إحصائيه بين متوسطي المجتمعين $H_0:\mu_1=\mu_2$

أما الفرضية البديلة فهي تأخذ أحد الأشكال التالية:

$H1: \mu1\neq\mu2$, وجود فرق ذو دلالة إحصائيه بين متوسطي المجتمعين؛

$H1: \mu1< \mu2$, متوسط المجتمع الأول أصغر من متوسط المجتمع الثاني ؛

$H1: \mu1> \mu2$, متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني .

تعطى إحصائية فرق متوسطي المجتمعين بالعلاقة التالية :

$$Z_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

في حال تساوي تبايني المجتمعين $\sigma^2=\sigma^2_1=\sigma^2_2$ تكتب إحصائية فرق متوسطي المجتمعين بالشكل التالي:

$$Z_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

يتم تحديد القيمة الحرجة الجدولية من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حسب درجة المعنوية ، فإذا كان الاختبار في اتجاهين فإن القيمة الحرجة هي: $Z_{\alpha/2}$، وإذا كان الاختبار في اتجاه واحد فإن القيمة الحرجة هي: Z_α

يتم مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية ونصل إلى قرار إما رفض H_0 أو عدم رفض H_0 كما تم شرحه في حالة تطابق متوسط في مجتمع واحد.

مثال : رقم (19.4)

البيانات التالية تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من منطقتين لمقارنة عمر الناخب فيهما: إذا أن متوسط العينة الأولى هو 35 بحجم 100و متوسط العينة الثانية هو 29 بحجم 80 .

اختبر الفرضية العدمية : أن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 0،05 مقابل الفرضية البديلة أنهما غير متساويين ، إذا علمت أن تباين المجتمع الأول هو 60 و تباين المجتمع الثاني هو 32.

الحل:

لدينا : $n_1=100, n_2=80$, bar $X_1=35$, bar $X_2= 29$, $\sigma^2_1=60$, $\sigma^2_2=32$

فتكون الفرضية العدمية : $H_0:\mu_1=\mu_2$أما الفرضية البديلة فهي: $H1: \mu1\neq\mu2$,

بما أن المجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي و تباينهما معلوم فإن الإحصائية الفرق تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث نقوم بحساب الإحصائية الجدولية باختبار ذو اتجاهين بمستوى معنوية 0،025و نقارنها بالإحصائية المحسوبة ،فنرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة خارج مجال القيمة الجدولية.

$$Z_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(35-29)}{\sqrt{\frac{60}{100}+\frac{32}{80}}}=\frac{6}{\sqrt{1}}=6$$

$$Z_t=Z_{\frac{\alpha}{2}}=\mp 1,96$$

$$(Z_C=6)>(Z_t\in[-1,96,+1,96]) \qquad H_0\, is\, rejected$$

ومنه نرفض الفرضية العدمية القائلة أن عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 0،05

مثال : رقم (20.4)

اذا اختيرت عينة عشوائية من 60 طالب من جامعة خاصة فوجد أن متوسط ذكائهم 69 درجة بتباين قدره 230 درجة ، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من 85 طال من جامعة عمومية فوجد أن متوسط ذكائهم 74 درجة بتباين قدره 215 درجة. اختبر الفرضية القائلة بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طالب الجامعة العمومية و ذلك بمستوى معنوية 0،05.

الحل :

لدينا : $n_1=60,\ n_2=85,\ \bar{X}_1=69,\ \bar{X}_2=74,\ \sigma^2_1=230,\ \sigma^2_2=215$

فتكون الفرضية العدمية : $H_0: \mu_1=\mu_2$ أما الفرضية البديلة فهي: $H1: \mu1<\mu2$,

بما أن العينتان حجمهما كبيران من مجتمعان مجهولا التوزيع و تباينهما معلومان فإن الإحصائية الفرق تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري باستخدام نظرية النهاية المركزية حيث نقوم بحساب الإحصائية الجدولية باختبار اتجاه اليسار بمستوى معنوية 0،05و نقارنها بالإحصائية المحسوبة ،فنرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة أقل من القيمة الجدولية.

$$Z_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(69-74)}{\sqrt{\frac{230}{60}+\frac{215}{85}}}=\frac{-5}{\sqrt{6,36}}=-1,98$$

$$-Z_t=-Z_{0,05}=-1,65$$

$$(Z_C=-1,98)<(Z_t=-1,65) \qquad H_0\, is\, rejected$$

ومنه نرفض الفرضية العدمية . و نقبل الفرضية القائلة بأن متوسط ذكاء الطلبة للجامعة الخاصة أقل من مستوى ذكاء الجامعة العمومية بمستوى معنوية 0،05 .

2اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين تباينهما غير معلوم

نميز عدة حالات :

-اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين توزيعهما طبيعي تباينهما غير معلوم و حجم العينتان كبيرتان فالإحصائية تؤول إلى التوزيع الطبيعي

-اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين توزيعهما طبيعي تباينهما غير معلوم و حجم العينتان صغيرتان فالإحصائية تؤول إلى توزيع ستودنت

أساسي : نظرية رقم (10,4) اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين توزيعهما طبيعي تباينهما غير معلوم و حجم العينتان كبيرتان

إذا كانت العينة الأولى حجمها كبير مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي$N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و العينة ثانية مستقلة عن الأولى حجمها كبير مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي$N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين فإننا نستبدلهما بتقديرهما غير المتحيز و هما على التوالي :

$$\grave{S}_1^2=\frac{\sum(x_{i1}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1} \quad , \quad \grave{S}_2^2=\frac{\sum(x_{i2}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}$$

فنحصل على إحصائية فرق متوسطي المجتمعين تؤول إلى التوزيع الطبيعي الإحصائية الفرق بالشكل التالي :

$$Z_c=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S'^2_1}{n_1}+\frac{S'^2_2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

يتم مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية حسب نوع اتجاه الاختبار ونصل إلى قرار إما رفض H_0 أو عدم رفض H_0 .

ملاحظة

يمكن أستخدام اختبار ستودنت في اختبار الفرق بين متوسطين إذا كان حجم العينتين كبيرين ، و عندها نستعمل درجة الحرية مساوية لأصغر عددين (n_1-1) و (n_2-1) لأن قيمتها الحقيقية تكون قريبة منها .

مثال : رقم (21.4)

أخذت عينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين حجم العينة الأولى 50 بمتوسط 57،5 و انحراف معياري غير متحيز 6،2 و حجم العينة الثانية 60 بمتوسط 54،4 و انحراف معياري غير متحيز 10،6 ، اختبر الفرضية القائلة أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني بمستوى معنوية 0،05

الحل :

لدينا : $n_1=50,\ n_2=60,\ \bar{X}_1=57{,}5,\ \bar{X}_2=54{,}4\ ,\ S'^2_1=38{,}44,\ S'^2_2=112{,}36$

فتكون الفرضية العدمية : $H_0:\mu_1=\mu_2$ أما الفرضية البديلة فهي: $H_1: \mu_1>\mu_2$,

بما أن العينتان حجمهما كبيران من مجتمعان طبيعيان و تباينهما مجهولان فإن الإحصائية الفرق تقترب إلى التوزيع الطبيعي المعياري حيث نقوم بحساب الإحصائية الجدولية باختبار اتجاه اليمين بمستوى معنوية 0،05و نقارنها بالإحصائية المحسوبة ،فنرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية.

$$Z_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S'^2_1}{n_1}+\frac{S'^2_2}{n_2}}}=\frac{(57{,}4-54{,}4)}{\sqrt{\frac{38{,}44}{50}+\frac{112{,}36}{60}}}=1{,}91$$

$$Z_t=Z_{0{,}05}=1{,}65$$

$$(Z_C=1{,}91)>(Z_t=1{,}65)\qquad H_0\,is\ rejected$$

ومنه نرفض الفرضية العدمية . و نقبل الفرضية القائلة بأن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني بمستوى معنوية 0،05 .

أساسي : نظرية رقم (11.4) :اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين توزيعهما طبيعي تباينهما غير معلوم ومتساوي و حجم العينتان صغيرتان

إذا كانت العينة الأولى حجمها صغير مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي$N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$ والعينة ثانية حجمها صغير مستقلة عن الأولى مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي$N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين $\sigma^2_1=\sigma^2_2$(يتم برهنة تساوي أو تجانس تبايني المجتمعين باختبار فيشر تطرقنا إليه في المبحث السابق) ، فيتم حساب التباين المجمع غير متحيز S_C^2 للتباين المشترك σ^5 بالعلاقة التالية :

$$S_C^2=\frac{(n_1-1)\cdot \grave{S}_1^2+(n_2-1)\cdot \grave{S}_2^2}{n_1+n_2-2}$$

أو

$$S_C^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(\grave{X}_i-\bar{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}$$

فنحصل على إحصائية فرق متوسطي المجتمعين تؤول إلى توزيع ستودنت بدرجة حرية n_1+n_2-2 بمستوى معنوية α إذا كان الاختبار من اتجاه واحد و $\alpha/2$ اذا كان الاختبار ذو اتجاهين .

وتكتب الإحصائية الفرق بالشكل التالي :

$$T_c=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim T\,(n_1+n_2-2\quad,\quad\alpha)$$

مثال : رقم (22.4)

اختيرت عينة عشوائية من 11 طالب من كلية العلوم الاقتصادية تتبع التوزيع طبيعي فوجد أن متوسط الحضور السنوي للعينة هو 80 حصة بانحراف معياري غير متحيز 7 حصص، كذلك اختيرت عينة عشوائية من 6طلاب من كلية الحقوق تتبع التوزيع الطبيعي فوجد أن معدل الحضور السنوي للعينة 75 حصة بانحراف معياري غير متحيز 5 حصص ، هل يمكننا القول أن معدل الحضور السنوي لطلبة الاقتصاد لا يساوي متوسط حضور طلبة كلية الحقوق عند مستوى معنوية 0،05. مع العلم أن تبايني المجتمعين متساويين.

الحل:

لدينا : $\sigma^2_1=\sigma^2_2$, $n_1=11$, $n_2=6$, bar $X_1=80$, bar $X_2= 75$, $S'^2_1=49$, $S'^2_2=25$

فتكون الفرضية العدمية : $H_0:\mu_1=\mu_2$أما الفرضية البديلة فهي : $H1: \mu1\neq\mu2$,

بما أن العينتان حجمهما صغير من مجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي و تباينهما مجهولان و متساويين فإن الإحصائية الفرق تقترب إلى توزيع ستودنت بمستوى معنوية 0،025 (اختبار ذو اتجاهين) و بدرجة حرية $n_1+n_2-2=11+6-2=15$، حيث نقوم بحساب الإحصائية الجدولية و نقارنها بالإحصائية المحسوبة(نقوم أولا بحساب مقدر التباين المشترك S_C) ، فنرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة خارج مجال القبول للقيم الجدولية.

$$S^2_C=\frac{(n_1-1)\cdot \grave{S}^2_1+(n_2-1)\cdot \grave{S}^2_2}{n_1+n_2-2}=\frac{(11-1)49+(6-1)25}{11+6-2}=\frac{10\times49+5\times25}{15}=41$$

$$T_c=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{S_C\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(80-75)}{41\times\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{6}}}=\frac{5}{\sqrt{10,56}}=1,54$$

$$T_t=T_{(\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2)}=T_{(0,025,15)}=\pm2,131$$

$$(T_C=1,54)\in(T_t=[-2,131\,;+2,131])\qquad H_0\,is\,True$$

ومنه نقبل الفرضية العدمية . القائلة بأن متوسط حضور طلبة كلية العلوم الاقتصادية مساوي لمتوسط حضور طلبة كلية العلوم القانونية بمستوى معنوية 0،05

أساسي : نظرية: رقم (12.4) :اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين توزيعهما طبيعي تباينهما غير معلوم و غير متساوي و حجم العينتان صغيرتان

يتم هنا استخدام اختبار ستودنت ويلش T-Welch: وهو تعديل لاختبار ستودنت t لمقارنة مجموعتين من العينات المستقلة ، عندما تكون التباينات مختلفة.يسمح بحساب t الإحصائي بالصيغة التالية:

$$T_C=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2_1}{n_1}+\frac{S^2_2}{n_2}}}\sim t\,(v\quad,\quad\alpha)$$

حيث

$$v=\frac{(\frac{S^2_1}{n_1}+\frac{S^2_2}{n_2})^2}{(\frac{S^4_1}{n^2_1\cdot(n_1-1)}+\frac{S^4_2}{n^2_2\cdot(n_2-1)})}$$

بعد حساب قيمة الإحصائية المحسوبة ، نقارنها مع قيمة t الجدولية بمستوى معنوية α أو α /2) حسب نوع اتجاه الاختبار)وبدرجة حرية v ، فإذا كانت قيمة تي المحسوبة أكبر من قيمة تي المجدولة فان هناك فروق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي العينتين أي نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة.

مثال : رقم (23.4)

البيانات التالية:

$\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$, $n_1=10$, $n_2=10$, bar $X_1=28$, bar $X_2= 26$, $S'^2_1=50$, $S'^2_2=30$

تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين لأعمار الموظفين الذكور و الإناث في احد الإدارات العامة للولاية بافتراض أن المجتمعين توزيعهما طبيعي وتباينهما غير متساويين . اختبر الفرضية القائلة بعدم وجود فروق ذو دلالة إحصائية بين أعمار الموظفين الذكور و الإناث لهذه الإدارة بمستوى معنوية 0،05.

الحل:

نضع الفرضية العدمية بالشكل التالي : $H_0: \mu_1=\mu_2$أما الفرضية البديلة فهي $H1: \mu1 \neq \mu2$,

بما أن العينتان حجمهما صغير من مجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي و تباينهما مجهولان و غير متساويين فإن الإحصائية الفرق تقترب إلى توزيع ستودنت بمستوى معنوية 0،025 (اختبار ذو اتجاهين) و بدرجة حرية V، حيث نقوم بحساب الإحصائية الجدولية و نقارنها بالإحصائية المحسوبة ، فنرفض H_0 إذا كانت قيمة الإحصائية المحسوبة خارج مجال القبول للقيم الجدولية.

$$T_C=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{(28-26)}{\sqrt{\frac{50}{10}+\frac{30}{10}}}=\frac{2}{\sqrt{8}}=0{,}71$$

$$v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{S_1^4}{n_1^2\cdot(n_1-1)}+\frac{S_2^4}{n_2^2\cdot(n_2-1)}\right)}=\frac{\left(\frac{50}{10}+\frac{30}{10}\right)^2}{\left(\frac{50^2}{100\cdot(9)}+\frac{30^2}{100\cdot(9)}\right)}=\frac{64}{2{,}78+1}=16{,}93\approx 17$$

$$T_t=T_{(17;0{,}025)}=\pm 2{,}11$$

$$(T_C=0{,}71)\in(T_t=[-2{,}11;\quad +2{,}11])\,H_0\,is\ True$$

ومنه نقبل الفرضية العدمية . القائلة بأن متوسط حضور طلبة كلية العلوم الاقتصادية مساوي لمتوسط حضور طلبة كلية العلوم القانونية بمستوى معنوية 0،05

ملاحظة

قمنا بتقريب قيمة v إلى 17 لتسهيل على الطالب الحساب لكن هناك طريقة تستخدم في الحاسب الألي لحساب المساحة للقيمة الجدولية بالضبط .

مثال : رقم (24,4)

باستعمال اختبار ويلش اختبر وجود فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي العينين التاليتين بمستوى معنوية 0،05:

العينة الأولى :14, 15, 15, 15, 16, 18, 22, 23, 24, 25, 25

العينة الثانية:10, 12, 14, 15, 18, 22, 24, 27, 31, 33, 34, 34, 34

الحل:

نستخرج إحصائيات العينتين من خلال البيانات السابقة وهي كما يلي :

$n_2 = 13$, $n_1 = 11$

حيث المتوسط بالعلاقة التالية :

$$\bar{X}_1=\frac{\sum x_{i1}}{n_1}=\frac{211{,}97}{11}=19{,}27 \qquad , \qquad \bar{X}_2=\frac{\sum x_{i2}}{n_2}=\frac{307{,}97}{13}=23{,}69$$

و تباين العينتين غير متحيز بالعلاقة التالية :

$$\grave{S}_1^2=\frac{\sum(x_{i1}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}=\frac{204{,}16}{10}=20{,}42 \qquad , \qquad \grave{S}_2^2=\frac{\sum(x_{i2}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}=\frac{998{,}76}{12}=83{,}23$$

T_c: (19.27 – 23.69) / (√20.42/11 + 83.23/13) = -4.42 / 2.873 = -1.538

$V=(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2$ / { [$(S_1^2 / n_1)^2$ / $(n_1 - 1)$] + [$(S_2^2 / n_2)^2$ / $(n_2 - 1$

بالتعويض نجد: V= (20.42/11 + 83.23/13)2 / { [(20.42/11)2 / (11 – 1)] +

$18.137 = \{ [(1 - 13) / 2(83.23/13)]$

وهي تقترب من 18.

تم نقوم بإيجاد القيمة الجدولية t فالتي تتوافق مع اختبار ثنائي الاتجاه و مستوى معنوية مع $\alpha = 0.05$ بدرجة حرية 18 و هي المجال المحصور بين [+2.101,-2.101-]

نظرًا لأن القيمة المحسوبة للاختبار (1.538) ضمن مجال القبول للقيمة الجدولية أذن نقبل الفرضية العدمية القائلة بعدم وجود فروق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي المجتمعين بمستوى معنوية 0،05.

ب) اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مترابطين

في بعض الأحيان نجد أن العينات التي تم سحبها بطريقة عشوائية هي عينات غير مستقلة بمعنى وجود علاقة بين المشاهدتين، و في هذه الحالة نقوم بحساب الفرق بين أزواج المشاهدات تم إيجاد متوسط هذا الفرق وانحرافه المعياري ، تقترب إحصائية الفرق إلى توزيع ستودنت أو التوزيع الطبيعي حسب حجم العينة .

1اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مترابطين حجمهما أكبر من 30

أساسي : نظرية: رقم (13.4)

إذا كانت X_1 عينة عشوائية حجمها كبير n_1مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي($N(\mu_1, \sigma_1^2)$وكانت عينة ثانية عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي($N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ولتكن X_2 حجمهما كبير n_2

مترابطتان و كانت الفرق بين قيم العينتين المتناظرتين (أو قيمتين متناظرتين في العينة) هي $d_1,d_2,d_3,\ldots$ $.d_n$

حيث $d_i=X_{i1}-X_{i2}$، نريد اختبار فرق متوسطي المجتمعين فتكون الفرضية العدمية H_0 عدم وجود فروق دو دلالة إحصائيه بين متوسطي المجتمعين $H_0:\mu_1=\mu_2$أما الفرضية البديلة فهي تأخذ أحد الأشكال التالية:

$H1: \mu1\neq\mu2$, وجود فرق ذو دلالة إحصائيه بين متوسطي المجتمعين؛

$H1: \mu1< \mu2$, متوسط المجتمع الأول أصغر من متوسط المجتمع الثاني ؛

$H1: \mu1> \mu2$, متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني .

نريد اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين ، فنكتب الفرضية العدمية و الفرضية البديلة و نستخرج الإحصائية الجدولية لتوزيع الطبيعي المعياري بمستوى معنوية $\alpha/2$ أو α حسب نوع اتجاه الاختبار و نقارنها بالإحصائية المحسوبة والمعطاة بالعلاقة التالية :

$$Z=\frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}, \quad \bar{d}=\frac{\sum d}{n},$$

حيث:

d:الفرق بين درجتي كل فرد ؛

bar d: الوسط الحسابي للفروق ؛

S_d:الانحراف المعياري للفروق؛

n: حجم العينة.

و نقارنها بقيمة التوزيع الطبيعي الجدولية؛حسب اتجاه الفرضية البديلة.فنرفض الفرضية العدمية إذا كانت:

$$H_1:\mu_d\neq 0\Rightarrow |t_C|\geq t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}$$

$$H_1:\mu_d>0\Rightarrow t_C\geq t_{[\alpha;n-1]}$$

$$H_1:\mu_d<0\Rightarrow t_c\leq -t_{[\alpha;n-1]}$$

ففي الحالة الأولى إذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة أكبر من الجدولية ترفض الفرضية العدمية التي ترى بعد وجود فروق بين متوسطي المجموعتين أما إذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة أصغر من القيم الجدولية تقبل الفرضية العدمية أي عدم وجود فروق بين متوسطي المجموعتين.

مثال : رقم (25.4)

إذا كانت X عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي$(\mu_1, \sigma_1^2)N$وكانت عينة ثانية Y عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي$(\mu_2, \sigma_2^2)N$حجمهما 30وكان مجموع الفروق بين القيم المتناظرة للعينتين هو 180 و الانحراف المعياري للفروق هو 9 ، فهل يمكن القول أن المجتمعين لهما نفس المتوسط عند مستوى 0،05

الحل:

الفرضية العدمية هي:$H_0:\mu_1=\mu_2$، و البديلة هي $H1: \mu1\neq\mu2$

بما أن حجم العينتين مساوي لـ 30 نستعمل التوزيع الطبيعي المعياري و نقوم بحساب قيمة زاد الجدولية في الاتجاهين و هي

$$\bar{d}=\frac{\sum d}{n}=\frac{180}{30}=6$$

$$Z_{\alpha/2}=\pm 1{,}96$$

$$Z=\frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}=\frac{6}{9/\sqrt{30}}=3{,}65$$

$$(Z_C=3{,}65)>(Z_t=1{,}96)\Rightarrow H_0\ Rejected$$

ومنه يوجد فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين.

2اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مترابطين حجمهما أقل من 30

أساسي : نظرية: رقم (14.4)

عينيتان مترابطتين مسحوبتان من مجتمعين توزيعهما طبيعي حجمهما أقل من 30 و تباينهما مجهول و متجانس و نريد اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين ، فنكتب الفرضية العدمية و الفرضية البديلة و نستخرج الإحصائية الجدولية لتوزيع ستودنت بدرجة حرية n-1 و مستوى معنوية 2 /α أو α حسب نوع اتجاه الاختبار و نقارنها بالإحصائية المحسوبة والمعطاة بالعلاقة التالية :

$$t=\frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}},\quad \bar{d}=\frac{\sum d}{n},\quad S_d=\sqrt{\frac{n\sum d^2-\left(\sum d\right)^2}{n(n-1)}}$$

حيث:

d:الفرق بين درجتي كل فرد ؛

bar d :الوسط الحسابي للفروق ؛

S_d:الانحراف المعياري للفروق؛

n: حجم العينة.

و نقارنها بقيمة ستودنت الجدولية؛ اتجاه الفرضية البديلة.فنرفض الفرضية العدمية إذا كانت:

$$H_1:\mu_d\neq 0\Rightarrow |t_C|\geq t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}$$

$$H_1:\mu_d>0\Rightarrow t_C\geq t_{[\alpha;n-1]}$$

$$H_1:\mu_d<0\Rightarrow t_c\leq -t_{[\alpha;n-1]}$$

ففي الحالة الأولى إذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة أكبر من الجدولية ترفض الفرضية العدمية التي ترى بعد وجود فروق بين متوسطي المجموعتين أما إذا كانت القيمة المحسوبة المطلقة أصغر من القيم الجدولية تقبل الفرضية العدمية أي عدم وجود فروق بين متوسطي المجموعتين.

مثال : رقم (26.4)

إذا كان من المعتقد أن أكل السمك يساعد على زيادة الذكاء أجريت تجربة على 10 أشخاص اداريين يعملون في القطاع الخاص تم اختيارهم عشوائيا و أجري لهم أحد اختبارات الذكاء ثم أعطي لهم طعاما يحتوي أساسا على السمك ، و بعد فترة أجري لهم اختبار الذكاء مرة أخرى فكانت نتائجهم كما هو مبين أذناه : و بفرض أن مستوى الذكاء قبل و بعد الأكل يتبع توزيعا طبيعيا عند مستوى معنوية 5% لاختبار

الفرض أن الذكاء قبل أكل السمك يقل عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك)؟

قبل أكل السمك	65	78	38	13	67	84	72	68	63	48
بعد أكل السمك	63	76	46	13	74	79	81	64	67	52

الحل :

d^2	d	X_1	X_2
16	4-	52	48
16	4-	67	63
16	4-	64	68
81	9-	81	72
25	5	79	84
49	7-	74	67
0	0	13	13
64	8-	46	38
4	2	76	78
4	2	63	65
275	19-	المجموع	

الفرضية العدمية : مستوى الذكاء قبل أكل السمك لا يختلف عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك $H_0: \mu_1 = \mu_2$

الفرضية البديلة : مستوى الذكاء قبل أكل السمك يقل عن مستوى الذكاء بعد أكل السمك $H_1: \mu_1 < \mu_2$

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-19}{10} = -1{,}9$$

$$S_d = \sqrt{\frac{n\sum d^2 - \left(\sum d\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{10(275)-(-19)^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{2750-361}{90}} = 5{,}15$$

$$t_C = \frac{\bar{d}}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-1{,}9}{\frac{5{,}15}{\sqrt{10}}} = -1{,}16$$

$$-t_{(\alpha;n-1)} = -t_{(0{,}05;9)} = -1{,}833$$

$$(t_c = -1{,}16) > (-t_t = -1{,}833) \rightarrow H_0\,True$$

ومنه قبول الفرضية العدمية القائلة أن مستوى الذكاء قبل أكل السمك لا يختلف عن مستوى الذكاء قبل وبعد أكل السمك وهو لا يؤثر على مستوى الذكاء و لا يقل من مستوى الذكاء بمستوى معنوية 0،05.

تمرين .

أجريت دراسة في كلية الطب البيطري /جامعة الأغواط لمعرفة تأثير مصل جديد لتخفيض مستوى الكوليستيرول في الدم ، و تم تنفيذها على عينة عشوائية من الحيوانات المختبرية قوامها 9 حيوانات و الجدول التالي يوضح مستوى الكوليستيرول في الدم قبل إعطاء الجرعة X و بعدها.

الكوليستيرول قبل المعالجة	235	232	222	295	196	248	211	210
الكوليستيرول بعد المعالجة	230	261	230	327	234	268	285	202

هل يمكن القول بأن استخدام المصل الجديد قد ساهم في تخفيض مستوى الكوليستيرول في الدم عند مستوى معنوية 0،05

2. اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتين

نفرض ان حجم العينتين كبيرتين

إذا كانت عينة عشوائية X_1 سحبت من مجتمع يتبع التوزيع البيرنولي($B(N_1,P_1$ و حجمها أكبر أو يساوي 30 ، و عينة ثانية X_2 مستقلة عن الأولى هي الآخرى سحبت من مجتمع ثاني يتبع توزيع بيرنولي ($B(N_2,$ P_2 حجمها أكبر أو يساوي 30 ، و نريد اختبار تساوي نسب المجتمعين فتكون الفرضية العدمية

$H_0: P_1=P_2$

أما الفرضية البديلة فهي تأخذ أحد الأشكال التالية:

$H1: P_1 \neq P_2$, وجود فرق ذو دلالة إحصائيه بين نسبتي المجتمعين؛

$H1: P_1 < P_2$, نسبة المجتمع الأول أصغر من نسبة المجتمع الثاني ؛

$H1: P_1 > P_2$, نسبة المجتمع الأول أكبر من نسبة المجتمع الثاني .

تعطى إحصائية فرق نسبتي المجتمعين بالعلاقة التالية:

$$Z=\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1\cdot(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\cdot(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

يتم تحديد القيمة الحرجة الجدولية من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حسب درجة المعنوية ، فإذا كان الاختبار في اتجاهين فإن القيمة الحرجة هي: $Z_{\alpha/2}$، وإذا كان الاختبار في اتجاه واحد فإن القيمة الحرجة هي: Z_α

يتم مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية ونصل إلى قرار إما رفض H_0 أو عدم رفض H_0 كما تم شرحه سابقا.

مثال : رقم(27.4)

لدينا مصنعين "أ" و "ب" لإنتاج المصابيح ، يمثل الجدول أدناه حجم العينة وعدد المصابيح التالفة

	المصنع "أ"	المصنع "ب"
حجم العينة	50	100
عدد المصابيح التالفة	4	5

اختبر الفرضية القائلة أن نسبة التلف في المصنع "أ" أقل من نسبة التلف في المصنع "ب" بمستوى معنوية 0،05.

الحل:

نسبة التلف في المصنع "أ" هي: $P_1=4/50=0,08$

نسبة التلف في المصنع "ب" هي : $P_2=5/100=0,05$

نضع الفرضية العدمية $H_0: P_1=P_2$ و الفرضية البديلة هي $H1: P_1 > P_2$

القيمة الحرجة الجدولية من جدول التوزيع الطبيعي المعياري بدرجة المعنوية 0،05 هي ، باتجاه اليسار $Z_\alpha = Z_{0,05}=1,64$

أما القيمة الحرجة المحسوبة فهي :

$$Z=\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1\cdot(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\cdot(1-\hat{P}_2)}{n_2}}}=\frac{(0,08-0,05)}{\sqrt{\frac{0,08\cdot(1-0,08)}{50}+\frac{0,05\cdot(1-0,05)}{100}}}=0,68$$

$$Z_t=1,64$$

$$(Z_C=0\,68)<(C_t=1,64)\sim H_0\, is\, True$$

ومنه لا يوجد فروق ذو دلالة إحصائية بين نسب التلف للمصنعين.

مثال : تمرين

للمقارنة بين نسبة المستفيدين من منحة البطالة في الفئة العمرية (18-25) سنة مع الفئة العمرية (26-30) سنة ، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 من الفئة الأولى فوجد أن 80 منهم مستفيدين، و أخذت عينة عشوائية مستقلة عن الأولى من الفئة العمرية الثانية و حجمها 100 فوجد أن 52 منهم مستفيدين ، أختبر الفرضية $H_0:P_1=P_2$ مقابل $H_0:P_1<P_2$ على مستوى دلالة 0،05

المركز الجامعي أفلو

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

السنة : الثانية علوم اقتصادية و علوم المالية و المحاسبية

سلسلة أعمال الموجهة ل مقياس : إحصاء3

ت01: عند دراسة اتجاهات طلبة ليسانس بمعهد العلوم الاقتصادية بالمركز الجامعي بأفلو، نحو تخصصات الماستر المتاحة بها بالأقسام الأربعة، تم الحصول على البيانات المدونة في الجدول أدناه

التخصص	علوم التسيير	مالية و محاسبية	علوم تجارية	علوم إقتصادية	مجموع
عدد الطلبة	30	30	20	20	100

المطلوب: استخرج عينة طبقية مكونة من *10* اشخاص.

ت02: باستخدام جدول الأعداد العشوائية استخرج عينة مكونة من 10 أشخاص من مجتمع مؤلف من 300 شخص.

ت03:مجتمع يتكون من ثلاث عناصر 2،3،4 تم سحب عينة مكونة من عنصرين في حالة السحب بالارجاع و بدون إرجاع قم بحساب : متوسط المجتمع و قارن بين$\overline{X}$ وμ ./أحسب التباين لتوزيع المعاينة للمتوسطات$\overline{X}$ σ 3/ قارن بين تباين المجتمع وتباين متوسطات العينات الممكنة (توزيع المعاينة للمتوسطات)

ت04: كيس به5بطاقات عليها الأرقام التالية-4-6-8-10-12 ،سحبنا بطاقتين منفصلتين بالإرجاع. المطلوب: 1 -كم عدد العينات الممكن تشكيلها ، حدد العينات المشكلة؛ 3 -قارن متوسط العينة مع متوسط المجتمع .

ت 05: مجتمع طبيعي بمتوسط 50 =μو إنحراف معياري σ= 10 أخذت عينة n=25 أ/أحسب: احتمال أن $\overline{X}$ أكبر من 55. احتمال أن $\overline{X}$ محصور بين 52 و 55.

ب/ نفس المعطيات مع عينة بحجم 64 أحسب احتمال أن $\overline{X}$ أصغر أو يساوي 75.4 .احتمال أن أن $\overline{X}$ محصور بين 75.4 و 52.احتمال أن تباين العينة S^2 أكبر من 121.احتمال أن تباين العينة^{2}Sمحصور بين 01 و 130.

ت06: مجتمع طبيعي بمتوسط 50 =μو انحراف معياري . σ أخذت عينة n= 36

فكان تباين العينة غير المتحيز81=S'^2. احسب احتمال أن $\overline{X}$ أكبر من 53إحتمال أن$\overline{X}$ محصور بين 52 و 55.

ت07: من مجتمع بتوزيع طبيعي حجمه 200 مشاهدة و تباينه مساوي 64 تم سحب عينة عشوائية بدون ارجاع بحجم 50 مشاهدة ،1/ فما هو توزيع الحسابي للعينة ،2/ أحسب احتمال أن يكون متوسط العينة أكبر من 32 علما أن متوسط المجتمع مساوي لـ30. 3/ أعد حل التمرين إذا كان تباين المجتمع مجهول و تباين العينة غير متحيز مساوي لـ49.

ت08: تم سحب عينة عشوائية بحجم 36 من مجتمع مجهول التوزيع، فبلغ متوسط الحسابي للعينة 10 و تباين 12 ، فما هو التوزيع الاحتمالي لمتوسط قيم العينة .

ت09: في دولة 30% من السكان بطالين أذا أخذت عينة بحجم 64 (X ,متغير يمثل : بطال 1 ،غير بطال 0) ، أوجد: التوقع الرياضي و التباين للمتوسط العينة. احتمال أن متوسط العينة أكبر من 25%. احتمال أن متوسط العينة محصور بين 15% و 30 %. احتمال أن متوسط العينة أقل أو يساويσ^2 2. ما إحتمال أن $\overline{X}$ n أقل أو يساوي 19،2؟

ت10 :يتميز إنتاج مؤسسة المصابيح بنسبة عيوب 15 ،%أخذنا عينة بحجم 36 وحدة منتجة. . ما احتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف 30%على الأكثر.

ت11: كان متوسط مشتريات الزبائن من أحد الأسواق تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 12 دج و التباين مقداره 16 دج، و متوسط مشتريات زبائن أسواق ثانية موزعة طبيعيا كذلك هو 9 دج بتباين مقداره 25 دج. تم اشتقاق عينة عشوائية من كل سوق حجمهما على التوالي 4 و 5. ما هو احتمال [P [(X 1 - X 2)≤0.20 ؟

ت12: وجد أن نسبة الذين يستعملون حزام الأمان بين سائقي البلدية :A هي % 30 ، وأن نسبتهم في البلدية B هي 18% ،واختيرت عينة عشوائية من كل بلدية لدراسة هذه الظاهرة كان حجمها على التوالي هي 180 و 210.

المطلوب: إيجاد الاحتمال [P [(P A + P B)< 0.5 ؟

ت13:مجتمع طبيعي بمتوسط 500 و تباين 12 ، أخذت عينة بحجم 10 . ماهو احتمال تباين العينةS^2، يكون على الأكثر 196، ماهو احتمال أن تكون $(n-1)S^2$ أقل أو يساوي 400.

ت14 : لتكن $X_1,X_2,....X_N$ عينة عشوائية من توزيع قاما ($T(\alpha,\beta)$. قدر المعلمتان باستخدام MoM

ت15 :لتكن دالة الكثافة $f(x) = (1-p)^{n-x}\, C_x^{\,n} p^x$ استخرج المقدر p باستخدام طريقة الاحتمال القصوى **MLE**

ت16: أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي يتبع التوزيع الطبيعي , فكانت قيمها كما يلي : 5، 3، 7، 4، 6، أوجد تقديراً نقطيا لمتوسط المجتمع μوو لتباين المجتمع $\sigma 2$.

ت17: عينة عشوائية حجمها n=25 ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري σ = 4 و متوسطه الحسابي مساوي لـ60. أوجد فترة 98% ثقة الوسط المجتمع μ

ت18: أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فأعطت $\bar{X}$ = 17.4 , S = 2.1 . أوجد فترة 95% ثقة للوسط الحسابي μ

ت19: خذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي(N(M1 , 25 ثم أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع طبيعي (N(M2 , 40 مستقل عن الأول، فإذا أعطيت العينة الأولى وسطاً حسابياً = 32 ، بينما أعطيت العينة الثانية وسطاً حسابياً = 47 أوجد:

أ- فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين (M1 – M2) ؟

ب- فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين (M2 – M1)؟

ت20 :تنتج احد المصانع مصابيح كهربائية تخضع أعمارها تقريبا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 35 ساعة .

أخذت عينه عشوائية حجمها 25 مصباحا فكان الوسط الحسابي لأعمار هذه المصابيح 890 ساعة . أوجد فترة 98% ثقة لمعدل أعمار المصابيح. إعتمادا على السؤال السابق , اذا كان تباين المجتمع غير معروف وكان الانحراف المعياري يساوي 17 للعينة .أوجد فترة 98% ثقه لمعدل أعمار المصابيح !

ت21: إيجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب. أوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

ت22: أخذت عينة عشوائية حجمها 400 من معلمي المرحلة الابتدائية فوجد أن 80 منهم حاصلون على شهادة البكالوريا :أ- قدر نسبة المعلمين الحاصلين على شهادة الماستر

ب- أوجد فترة 99% ثقة للنسبة الحقيقية للمعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة الماستر.

ت23 : .إذا كان متوسط الدخل الشهري لأفراد إحدى المدن هو 60.000 دج و الانحراف المعياري 10.000 دج ، اخترت عينة عشوائية حجمها 100 أسرة من هذه المدينة ، فأوجد احتمال أن يقل دخل متوسط الأسر العينة عن 5.8000دج.

ت24: ذا كان ضغط الدم لمجموعة من الأفراد ذو متوسط 90 وانحرافه المعياري 9 واخترنا عينة حجمها 36 فردا من هذه المجموعة . أوجد احتمال أن الوسط الحسابي لضغط الدم في العينة أكبر من 86.

ت25 : اخترت 100 سيجارة من نوع معين فكان متوسط النتيكوتين فيها 26ملليجرام والانحراف المعياري هو 6 ملليجرامات ، أوجد مجال الثقة لمتوسط و تباين النيكوتين في السجائر من هذا النوع بدرجة ثقة 95% .

ت26 :عينة عشوائية مكونة من 52 فردا مسحوبة من مجتمع معين، فإذا كان متوسط العينة يساوي450 والانحراف المعياري 110 ،قدر مجال الثقة لمتوسط المجتمع بدرجة ثقة 95%.

ت27 : ليكن لدينا عينة عشوائية حجمها 7 مفردات وان قيم مفرداتها هي :2 7 5 9 6 4 3مسحوبة من مجتمع طبيعي فما هي فترة الثقة التي تتضمن تباين المجتمع الحقيقي بدرجة ثقة99%

التمرين رقم: أخذت عينة عشوائية مكونة من 400 طالب بكلية العلوم الاقتصادية ، ووجد أن متوسط الأوزان كان يساوي 75كلغ، أما الانحراف المعياري للأوزان بالنسبة لجميع طلبة الكلية كان يساوي 3كغ.

المطلوب: 1 -أوجد هامش الخطأ المعياري عند مستوى ثقة 95%

2- أوجد مجال ثقة 95 %لمتوسط المجتمع؛

ت28: أوزان أكياس من الرقائق توزَّع بتبايُن 2.56 غرام .اختُبِرَت عيّنة مُكوَّنة من 100 كيس، فكان متوسِّط أوزانها 24.1 غرامًا. احسب99%من فترة الثقة لمتوسِّط المجتمع الإحصائي

ت29: أوجد مجال الثقة لاحتمال 95% لتباين مجتمع سحبت منه عينة عشوائية حجمها n=6 و تباينها 11،8

ت30: سحبت عينة من مجتمع طبيعي حجمها 10 بتباين 9، و سحبت عينة ثانية مستقلة عن الأولى من مجتمع طبيعي حجمها 15 بتباين 8، أوجد مجال الثقة 90% للنسبة بين تباين المجتمعين

ت31:ليكن المتغير العشوائي xيتبع التوزيع الطبيعي تباينه 16 نسحب عينة عشوائية حجمها n=20 ومتوسطها 20. ما هو توزيع العينة، أوجد التقدير النقطي للمتوسط للمجتمع.خطأ المعاينة في تقدير بمستوى ثقة يساوي 95%. التقدير بمجال لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة يساوي 95%.استخرج حجم العينة لما d=4.

ت32: متوسط المجتمع هو 20 وتباين المجتمع مجهول، ما هو مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة يساوي 95 % في الحالات التالية:أ-حجم العينة 100 وتباين العبنة =36. ب_ حجم العينة 25 وتباين العينة =49

ت33: تخضع عبوات أحد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 ملل و معدله µ ملل , على مستوى معنوية 0،05 اختبر الفرضية: H0: µ =50، H1: µ ≠50 ، إذا كان المتوسط الحسابي للعينة حجمها 12 علبة هو 56ملل .

ت34: على مستوى %5 اختبر فرضية H0: µ=10 مقابل فرضية H1: µ≠10 إذا أعطت عينة حجمها 42 ووسطها الحسابي 11،5 و انحراف معياريا 3،3.

ت35: تخضع حبات التفاح على الشجرة لبستان معين الى التوزيع الطبيعي وسطه 150 حبة للشجرة و انحراف معياري 13 حبة للشجرة،بدأ صاحب البستان باستعمال نوع جديد من السماد و أراد أن يختبر إذا ما زاد الإنتاج ، لذا أخد عينة من 64 شجرة ، فوجد أن المتوسط الحسابي لأعداد الحبات في الشجرة هو 154، هل تشير هذه البيانات الى زيادة في الإنتاج على مستوى دلالة 0،05؟

ت36: أظهرت سجلات أحد المدارس الخاصة أن معدل الطلبة في امتحان اللغة الفرنسية الذي يجتازونه عند التقدم لامتحان البكلوريا هو 410 ، بدأت المدرسة بإعطاء دورات تقوية للطلبة . اختبر فرضية أن هذا المعدل قد تحسن إلى 418 بانحراف قدره 21 لعينة مكونة من 14 طالب بمستوى معنوية 1%، و 5%، اختبر الفرضية إذا كان معدل العينة 428 بمستوى معنوية 1% و 5 %.

ت37: أختيرت عينة عشوائية قوامها 25 مشاهدة و تم حساب التباين للعينة و قد بلغ 100, هل يمكن الاستنتاج بأن العينة المسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه أقل من 64، عند مستوى معنوية 0،01.

ت38:: كان متوسط درجات الحرارة المسجلة في ولايات الجزائر خلال شهر جوان على النحو الاتي :

الولايات	الأغواط	البليدة	بومرداس	الجلفة	بجاية	تيارت
درجة الحرارة	43	35	32	39	32	41

المطلوب:هل يمكن الاستدلال بأن درجات الحرارة في الولايات الست كانت متجانسة خلال شهر جوان ، عند مستوى معنوية 0،05.

ت39: في دراسة سابقة متعلقة أساتذة المحاسبة تم سؤالهم عن الشهادات المتحصل عليها، فكانت النتائج كالتالي:

ليسانس15%، ماستر 15%، دكتوراه 30% ، شهادة مهنية 40%.

أما الدراسة الحالية فكانت النتائج لعينة مكونة من 60 أستاذ كما يلي :

الشهادة	ليسانس	ماستر	دكتوراه	مهنية	المجموع
التكرارات	06	20	10	24	60

المطلوب: هل نتائج هذا العام تختلف عن نتائج الدراسة السابقة؟

حل التمارين

> 1 (ص 13)

- [ ] المتوسط الحسابي هو 48،2
- [x] المتوسط الحسابي هو 48،7
- [ ] المتوسط الحسابي هو 49،2
- [ ] التباين هو 190،3
- [x] التباين هو 180،68
- [ ] التباين هو 179،83
- [ ] الانحراف المعياري هو 15،2
- [ ] الانحراف المعياري هو 14،6
- [x] الانحراف المعياري هو 13،44

الانحراف المعياري هو جدر التباين

نقوم أولا باستخراج الفئات من أجل اعدد الجدول و استعمال قوانين المتوسط، التباين و الانحراف المعياري

الفئات	التكرار	الفئة الوسيطية	جداء التكرار و الفئة الوسيطية	مربع الفرق بين الفئة الوسيطية و المتوسط الحسابي
19,5-29,5	10	24,5	245	858,64
29,5-39,5	15	34,5	517,5	201,64
39,5-49,5	30	44,5	1335	17,64
49,5-59,5	22	54,5	1199	33,64
59,5-69,5	14	64,5	903	29,64
69,5-79,5	9	74,5	670,5	665,64
المجموع	**100**	**/**	**4870**	1806,84

حدول رقم (1.1): إعداد الجدول الإحصائي

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i \times f_i}{\sum f_i}=\frac{4870}{100}=48,70$$

فرنسية

$$180,68=\frac{1806,84}{100}=V(X_I)=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}$$

فرنسية

$$\sigma=\sqrt[2]{V(x_i)}=\sqrt{180,68}=13,44$$

فرنسية

> 2 (ص 14)

10

هنا يتم السحب جزء n=2من الكل X=5 و الترتيب غير مهم إذا نستعمل التوفيقات

$$C_5^2=\frac{5!}{2!\times(5-2)!}=\frac{120}{12}=10$$

> 3 (ص 14)

◉	0,5872
○	0,6078
○	0,8790

$$Z=\frac{y-\mu}{\delta}$$

$$Z_1=\frac{120-151}{15}=\frac{-31}{15}=-207$$

$$Z_2=\frac{155-151}{15}=\frac{4}{15}=0.27$$

$$P(120<y<155)=p(-2.07<z<0.27)$$
$$=p(z<0.27)-p(z<-2.07)$$
$$=0.6064-0.0192=0.5872$$

فرنسية

> 4 (ص 17)

○	عرض وتبويب البيانات
◉	استخدام النتائج في التحليل و التنبؤ

< 5 (ص 17)

عدد الهواتف الثابتة في مجموعة من المنازل عدد التلاميذ في كل قسم في مدرسة ما نتائج رمي زهرة النرد	المتغيرة الكمية المنقطعة
بيانات تخص أراء عينة من الأشخاص عم منتوج ما أنواع الهواتف النقالة في مجموعة من المنازل الوضعية الإقتصادية في بلد ما الزمرة الدموية لشخص ما الجنسية ذكاء شخص نوعية السيارة التي يمتلكها شخص ما	متغيرة وصفية
قيمة الفاتورة في كل ثلاثي بالدينار الجزائري أسعار الفاكهة في السوق المسافة المقطوعة قياس ضغط الدم درجة الحرارة في مدن معينة	متغيرة كمية مستمرة

< 6 (ص 18)

المجتمع الإحصائي هو مجموعة من المفردات ذات خصائص مشتركة، أما العينة فهي جزء من المجتمع يتم اختيارها بطرق مختلفة بغرض دراسة هذا المجتمع.

< 7 (ص 18)

1.تحديد مجتمع الدراسة
2.تحديد أفراد المجتمع الأصلي
3.مراعاة عدم التحيز والخطأ
4.تحديد العدد المناسب لأفراد العينة

< 8 (ص 30,18)

العينة العشوائية المنتظمة العينة العشوائية البسيطة العينة العشوائية العنقودية العينة العشوائية الطبقية العينة المعيارية	أنواع العينات العشوائية الاحتمالية
عينة كرة الثلج العينة الغرضية أو الحكمية أو الهادفة العينة الملائمة المناسبة العينة الحصصية	أنواع العينات غير العشوائية

○ صحيح

◉ خطأ
و إحصاء الذي يهتم بتحليل البيانات واستخدام النتائج ثم تفسيرها واستعمالها لاتخاذ القرارات

> 10 (ص 29)

○ صحيح

◉ خطأ
البيانات الوصفية هي المشاهدات أو الصفات التي لا يمكن قياسها فهي تعبر عن صفة الشيء المراد مشاهدته.

> 11 (ص 29)

بيانات اسمية بيانات ترتيبية	بيانات وصفية
بيانات كمية مستمرة بيانات كمية منفصلة	بيانات كمية

> 12 (ص 30)

◉ مجتمع الطيور المهاجرة

○ مجتمع الطلبة في كلية معينة

○ مجتمع الوسطاء في البورصات
مجتمع الطيور المهاجرة هو مجتمع غير محدود لأننا لا نستطيع حصر كل مفرداته .

> 13 (ص 30)

بوجد نوعان من العينات: العينات الاحتمالية حيث تسحب وحداتها بطرق عشوائية وتخضع بالتالي لقوانين الاحتمالات، ثم العينات أللاحتمالية حيث مبدأ اختيار أفرادها لا يخضع لقوانين موضوعية.

> 14 (ص 30)

- [x] الاستبيان
- [x] المقابلة
- [ ] جهات مختصة بجمع المعلومات
- [x] الملاحظة

> 15 (ص 31)

نستعمل طريقة الأرقام العشوائية نقوم أولا بترقيم الطلبة من 001 إلى الرقم 160 ثم نختار الطلبة العشرون من خلال اختيار العمود الأول و الثاني و اهمال الرقمين على اليمين العدد حسب الرتب المذكور في الجدول دون تجاوز العدد 160 وهو كما يلي:063،054،020، 032، 015، 004 ،137،138،155،041،048،039،119،011،115،127،002،009،134،061

جدول الأعداد العشوائية

TABLE 1 - RANDOM DIGITS

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
49563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18048	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	72907	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917
62490	99215	84987	28759	19177	14733	24550	28067	68894	38490
24216	63444	21283	07044	92729	37284	13211	37485	10415	36457
16975	95428	33226	55903	31605	43817	22250	03918	46999	98501
59138	39542	71168	57609	91510	77904	74244	50940	31553	62562
29478	59652	50414	31966	87912	87154	12944	49862	96566	48825
96155	95009	27429	72918	08457	78134	48407	26061	58754	05326
29621	66583	62966	12468	20245	14015	04014	35713	03980	03024
12639	75291	71020	17265	41598	64074	64629	63293	53307	48766
14544	37134	54714	02401	63228	26831	19386	15457	17999	18306
83403	88827	09834	11333	68431	31706	26652	04711	34593	22561
67642	05204	30697	44806	96989	68403	85621	45556	35434	09532
64041	99011	14610	40273	09482	62864	01573	82274	81446	32477
17048	94523	97444	59904	16936	39384	97551	09620	63932	03091
93039	89416	52795	10631	09728	68202	20963	02477	55494	39563
82244	34392	96607	17220	51984	10753	76272	50985	97593	34320
96990	55244	70693	25255	40029	23289	48819	07159	60172	81697
09119	74803	97303	88701	51380	73143	98251	78635	27556	20712
57666	41204	47589	78364	38266	94393	70713	53388	79865	92069
46492	61594	26729	58272	81754	14648	77210	12923	53712	87771
08433	19172	08320	20839	13715	10597	17234	39355	74816	03363
10011	75004	86054	41190	10061	19660	03500	68412	57812	57929
92420	65431	16530	05547	10683	88102	30176	84750	10115	69220
35542	55865	07304	47010	43233	57022	52161	82976	47981	46588
86595	26247	18552	29491	33712	32285	64844	69395	41387	87195
72115	34085	58036	09137	47482	06204	24138	24272	16196	04393
07428	58863	96023	88936	51343	70958	96768	74317	27176	29600
35379	27922	28906	55013	26937	48174	04197	36074	65315	12537
10982	22807	10920	26299	23593	64629	57801	10437	43965	15344
90127	33341	77806	12446	15444	49244	47277	11346	15884	28131
63002	12990	23510	68774	48983	20481	59815	67248	17076	78910
40779	86382	48454	65269	91239	45989	45389	54847	77919	41105
43216	12608	18167	84631	94058	82458	15139	76856	86019	47928
96167	64375	74108	93643	09204	98855	59051	56492	11933	64958
70975	62693	35684	72607	23026	37004	32989	24843	01128	74658
85812	61875	23570	75754	29090	40264	80399	47254	40135	69916

جدول الأعداد العشوائية

> 16 (ص 31)

- (•) علوم التسيير 3 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 2، علوم اقتصادية 2
- ( ) علوم التسيير 3 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 3، علوم اقتصادية 1
- ( ) علوم التسيير 2 ، مالية و محاسبة 3 ، ع تجارية 2، علوم اقتصادية 3

> 17 (ص 31)

1.تحديد هدف الدراسة
2.جمع البيانات

4.تحليلها
5.تفسيرها

قائمة المراجع

[David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams,2011] Fundamentals of Statistics ,Concepts and Applications An Arabic Text,first édition, phillips publishing

[Lahcene Abdallah Bachioua,2011]. Fundamentals of Statistics Concepts and Applications An Arabic ,Text,first édition, phillips publishing

[أحمد عبد السميع طيبة،2008] مبادئ الإحصاء ، الطبعة الأولى ،دار البداية للنشر و التوزيع ،عمان الأردن.

[جبار عبد المضحي،2016] الإحصاء و الاحتمالات، الطبعة الأولى، شركة دار الأكاديميون للنشر و التوزيع، الأردن.

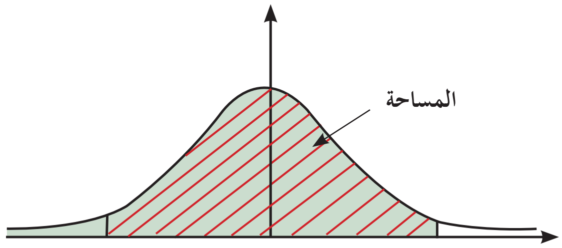
[حسن ياسين طعمة،إيمان حسين حنوش،2015] الإحصاء الاستدلالي،الطبعة الثانية،دار الصفاء للنشر و التوزيع، عمان -الأردن.

[عامر قنديلجي ، إيمان السامرائي،2018], البحث العلمي الكمي والنوعي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع،عمان،الأردن.

[محمد حسين محمد رشيد القادري، منى عطا الله الشويلات،2014] مبادئ الإحصاء و الاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج spss، الطبعة الثانية ، دار الصفاء للنشر و التوزيع،عمان -الاردن.

[محمد صبحي أبو صالح،عدنان محمد عوض، 2014] مقدمة في ألإحصاء مباديء وتحليل باستخدام spss، الطبعة الثامنة،دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة،عمان الأردن.

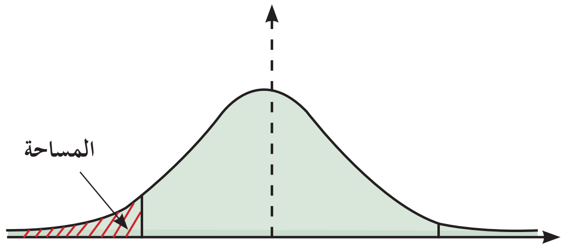
[مدحت محمد أبو النصر،2017] مناهج البحث في الخدمة الاجتماعية،المجموعة العربية للتدريب والنشر .



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)

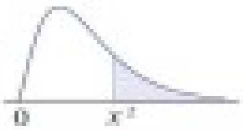
جدول توزیع t

Table T Critical Values of the *t* Distribution

df	One-Tail = .4	.25	.1	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
	Two-Tail = .8	.5	.2	.1	.05	.02	.01	.005	.002	.001
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Source: From *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, Third Edition, edited by E. S. Pearson and H. O. Hartley, 1966, p. 146.

جدول كاي تربيع $\chi^2_{v,\alpha}$



Critical Values of Chi-Square Distributions

	x^2 Right-Tail Area									
df	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.96	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

F Table for alpha=0.1

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	39.86346	49.50000	53.59324	55.83296	57.24008	58.20442	58.90595	59.43898	59.85759	60.19498	60.70521	61.22034	61.74029	62.00205	62.26497	62.52905	62.79428	63.06064	63.32812
2	8.52632	9.00000	9.16179	9.24342	9.29263	9.32553	9.34908	9.36677	9.38054	9.39157	9.40813	9.42471	9.44131	9.44962	9.45793	9.46624	9.47456	9.48289	9.49122
3	5.53832	5.46238	5.39077	5.34264	5.30916	5.28473	5.26619	5.25167	5.24000	5.23041	5.21562	5.20031	5.18448	5.17636	5.16811	5.15972	5.15119	5.14251	5.13370
4	4.54477	4.32456	4.19086	4.10725	4.05058	4.00975	3.97897	3.95494	3.93567	3.91988	3.89553	3.87036	3.84434	3.83099	3.81742	3.80361	3.78957	3.77527	3.76073
5	4.06042	3.77972	3.61948	3.52020	3.45298	3.40451	3.36790	3.33928	3.31628	3.29740	3.26824	3.23801	3.20665	3.19052	3.17408	3.15732	3.14023	3.12279	3.10500
6	3.77595	3.46330	3.28876	3.18076	3.10751	3.05455	3.01446	2.98304	2.95774	2.93693	2.90472	2.87122	2.83634	2.81834	2.79996	2.78117	2.76195	2.74229	2.72216
7	3.58943	3.25744	3.07407	2.96053	2.88334	2.82739	2.78493	2.75158	2.72468	2.70251	2.66811	2.63223	2.59473	2.57533	2.55546	2.53510	2.51422	2.49279	2.47079
8	3.45792	3.11312	2.92380	2.80643	2.72645	2.66833	2.62413	2.58935	2.56124	2.53804	2.50196	2.46422	2.42464	2.40410	2.38302	2.36136	2.33910	2.31618	2.29257
9	3.36030	3.00645	2.81286	2.69268	2.61061	2.55086	2.50531	2.46941	2.44034	2.41632	2.37888	2.33962	2.29832	2.27683	2.25472	2.23196	2.20849	2.18427	2.15923
10	3.28502	2.92447	2.72767	2.60534	2.52164	2.46058	2.41397	2.37715	2.34731	2.32260	2.28405	2.24351	2.20074	2.17843	2.15543	2.13169	2.10716	2.08176	2.05542
11	3.22520	2.85951	2.66023	2.53619	2.45118	2.38907	2.34157	2.30400	2.27350	2.24823	2.20873	2.16709	2.12305	2.10001	2.07621	2.05161	2.02612	1.99965	1.97211
12	3.17655	2.80680	2.60552	2.48010	2.39402	2.33102	2.28278	2.24457	2.21352	2.18776	2.14744	2.10485	2.05968	2.03599	2.01149	1.98610	1.95973	1.93228	1.90361
13	3.13621	2.76317	2.56027	2.43371	2.34672	2.28298	2.23410	2.19535	2.16382	2.13763	2.09659	2.05316	2.00698	1.98272	1.95757	1.93147	1.90429	1.87591	1.84620
14	3.10221	2.72647	2.52222	2.39469	2.30694	2.24256	2.19313	2.15390	2.12195	2.09540	2.05371	2.00953	1.96245	1.93766	1.91193	1.88516	1.85723	1.82800	1.79728
15	3.07319	2.69517	2.48979	2.36143	2.27302	2.20808	2.15818	2.11853	2.08621	2.05932	2.01707	1.97222	1.92431	1.89904	1.87277	1.84539	1.81676	1.78672	1.75505
16	3.04811	2.66817	2.46181	2.33274	2.24376	2.17833	2.12800	2.08798	2.05533	2.02815	1.98539	1.93992	1.89127	1.86556	1.83879	1.81084	1.78156	1.75075	1.71817
17	3.02623	2.64464	2.43743	2.30775	2.21825	2.15239	2.10169	2.06134	2.02839	2.00094	1.95772	1.91169	1.86236	1.83624	1.80901	1.78053	1.75063	1.71909	1.68564
18	3.00698	2.62395	2.41601	2.28577	2.19583	2.12958	2.07854	2.03789	2.00467	1.97698	1.93334	1.88681	1.83685	1.81035	1.78269	1.75371	1.72322	1.69099	1.65671
19	2.98990	2.60561	2.39702	2.26630	2.17596	2.10936	2.05802	2.01710	1.98364	1.95573	1.91170	1.86471	1.81416	1.78731	1.75924	1.72979	1.69876	1.66587	1.63077
20	2.97465	2.58925	2.38009	2.24893	2.15823	2.09132	2.03970	1.99853	1.96485	1.93674	1.89236	1.84494	1.79384	1.76667	1.73822	1.70833	1.67678	1.64326	1.60738
21	2.96096	2.57457	2.36489	2.23334	2.14231	2.07512	2.02325	1.98186	1.94797	1.91967	1.87497	1.82715	1.77555	1.74807	1.71927	1.68896	1.65691	1.62278	1.58615
22	2.94858	2.56131	2.35117	2.21927	2.12794	2.06050	2.00840	1.96680	1.93273	1.90425	1.85925	1.81106	1.75899	1.73122	1.70208	1.67138	1.63885	1.60415	1.56678
23	2.93736	2.54929	2.33873	2.20651	2.11491	2.04723	1.99492	1.95312	1.91888	1.89025	1.84497	1.79643	1.74392	1.71588	1.68643	1.65535	1.62237	1.58711	1.54903
24	2.92712	2.53833	2.32739	2.19488	2.10303	2.03513	1.98263	1.94066	1.90625	1.87748	1.83194	1.78308	1.73015	1.70185	1.67210	1.64067	1.60726	1.57146	1.53270
25	2.91774	2.52831	2.31702	2.18424	2.09216	2.02406	1.97138	1.92925	1.89469	1.86578	1.82000	1.77083	1.71752	1.68898	1.65895	1.62718	1.59335	1.55703	1.51760

26	2.90913	2.51910	2.30749	2.17447	2.08218	2.01389	1.96104	1.91876	1.88407	1.85503	1.80902	1.75957	1.70589	1.67712	1.64682	1.61472	1.58050	1.54368	1.50360
27	2.90119	2.51061	2.29871	2.16546	2.07298	2.00452	1.95151	1.90909	1.87427	1.84511	1.79889	1.74917	1.69514	1.66616	1.63560	1.60320	1.56859	1.53129	1.49057
28	2.89385	2.50276	2.29060	2.15714	2.06447	1.99585	1.94270	1.90014	1.86520	1.83593	1.78951	1.73954	1.68519	1.65600	1.62519	1.59250	1.55753	1.51976	1.47841
29	2.88703	2.49548	2.28307	2.14941	2.05658	1.98781	1.93452	1.89184	1.85679	1.82741	1.78081	1.73060	1.67593	1.64655	1.61551	1.58253	1.54721	1.50899	1.46704
30	2.88069	2.48872	2.27607	2.14223	2.04925	1.98033	1.92692	1.88412	1.84896	1.81949	1.77270	1.72227	1.66731	1.63774	1.60648	1.57323	1.53757	1.49891	1.45636
40	2.83535	2.44037	2.22609	2.09095	1.99682	1.92688	1.87252	1.82886	1.79290	1.76269	1.71456	1.66241	1.60515	1.57411	1.54108	1.50562	1.46716	1.42476	1.37691
60	2.79107	2.39325	2.17741	2.04099	1.94571	1.87472	1.81939	1.77483	1.73802	1.70701	1.65743	1.60337	1.54349	1.51072	1.47554	1.43734	1.39520	1.34757	1.29146
120	2.74781	2.34734	2.12999	1.99230	1.89587	1.82381	1.76748	1.72196	1.68425	1.65238	1.60120	1.54500	1.48207	1.44723	1.40938	1.36760	1.32034	1.26457	1.19256
inf	2.70554	2.30259	2.08380	1.94486	1.84727	1.77411	1.71672	1.67020	1.63152	1.59872	1.54578	1.48714	1.42060	1.38318	1.34187	1.29513	1.23995	1.16860	1.00000

F Table for alpha=0.05

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	243.9060	245.9499	248.0131	249.0518	250.0951	251.1432	252.1957	253.2529	254.3144
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307

15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

F Table for alpha=0.025

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846	968.6274	976.7079	984.8668	993.1028	997.2492	1001.414	1005.598	1009.800	1014.020	1018.258
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980	39.4146	39.4313	39.4479	39.4562	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189	14.3366	14.2527	14.1674	14.1241	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.157	2.093	2.026	1.954	1.878

27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
inf	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

F Table for alpha=0.01

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361

13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

F Table for alpha=0.1

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	39.86346	49.50000	53.59324	55.83296	57.24008	58.20442	58.90595	59.43898	59.85759	60.19498	60.70521	61.22034	61.74029	62.00205	62.26497	62.52905	62.79428	63.06064	63.32812
2	8.52632	9.00000	9.16179	9.24342	9.29263	9.32553	9.34908	9.36677	9.38054	9.39157	9.40813	9.42471	9.44131	9.44962	9.45793	9.46624	9.47456	9.48289	9.49122
3	5.53832	5.46238	5.39077	5.34264	5.30916	5.28473	5.26619	5.25167	5.24000	5.23041	5.21562	5.20031	5.18448	5.17636	5.16811	5.15972	5.15119	5.14251	5.13370
4	4.54477	4.32456	4.19086	4.10725	4.05058	4.00975	3.97897	3.95494	3.93567	3.91988	3.89553	3.87036	3.84434	3.83099	3.81742	3.80361	3.78957	3.77527	3.76073
5	4.06042	3.77972	3.61948	3.52020	3.45298	3.40451	3.36790	3.33928	3.31628	3.29740	3.26824	3.23801	3.20665	3.19052	3.17408	3.15732	3.14023	3.12279	3.10500
6	3.77595	3.46330	3.28876	3.18076	3.10751	3.05455	3.01446	2.98304	2.95774	2.93693	2.90472	2.87122	2.83634	2.81834	2.79996	2.78117	2.76195	2.74229	2.72216
7	3.58943	3.25744	3.07407	2.96053	2.88334	2.82739	2.78493	2.75158	2.72468	2.70251	2.66811	2.63223	2.59473	2.57533	2.55546	2.53510	2.51422	2.49279	2.47079
8	3.45792	3.11312	2.92380	2.80643	2.72645	2.66833	2.62413	2.58935	2.56124	2.53804	2.50196	2.46422	2.42464	2.40410	2.38302	2.36136	2.33910	2.31618	2.29257
9	3.36030	3.00645	2.81286	2.69268	2.61061	2.55086	2.50531	2.46941	2.44034	2.41632	2.37888	2.33962	2.29832	2.27683	2.25472	2.23196	2.20849	2.18427	2.15923
10	3.28502	2.92447	2.72767	2.60534	2.52164	2.46058	2.41397	2.37715	2.34731	2.32260	2.28405	2.24351	2.20074	2.17843	2.15543	2.13169	2.10716	2.08176	2.05542
11	3.22520	2.85951	2.66023	2.53619	2.45118	2.38907	2.34157	2.30400	2.27350	2.24823	2.20873	2.16709	2.12305	2.10001	2.07621	2.05161	2.02612	1.99965	1.97211
12	3.17655	2.80680	2.60552	2.48010	2.39402	2.33102	2.28278	2.24457	2.21352	2.18776	2.14744	2.10485	2.05968	2.03599	2.01149	1.98610	1.95973	1.93228	1.90361
13	3.13621	2.76317	2.56027	2.43371	2.34672	2.28298	2.23410	2.19535	2.16382	2.13763	2.09659	2.05316	2.00698	1.98272	1.95757	1.93147	1.90429	1.87591	1.84620
14	3.10221	2.72647	2.52222	2.39469	2.30694	2.24256	2.19313	2.15390	2.12195	2.09540	2.05371	2.00953	1.96245	1.93766	1.91193	1.88516	1.85723	1.82800	1.79728
15	3.07319	2.69517	2.48979	2.36143	2.27302	2.20808	2.15818	2.11853	2.08621	2.05932	2.01707	1.97222	1.92431	1.89904	1.87277	1.84539	1.81676	1.78672	1.75505
16	3.04811	2.66817	2.46181	2.33274	2.24376	2.17833	2.12800	2.08798	2.05533	2.02815	1.98539	1.93992	1.89127	1.86556	1.83879	1.81084	1.78156	1.75075	1.71817
17	3.02623	2.64464	2.43743	2.30775	2.21825	2.15239	2.10169	2.06134	2.02839	2.00094	1.95772	1.91169	1.86236	1.83624	1.80901	1.78053	1.75063	1.71909	1.68564
18	3.00698	2.62395	2.41601	2.28577	2.19583	2.12958	2.07854	2.03789	2.00467	1.97698	1.93334	1.88681	1.83685	1.81035	1.78269	1.75371	1.72322	1.69099	1.65671
19	2.98990	2.60561	2.39702	2.26630	2.17596	2.10936	2.05802	2.01710	1.98364	1.95573	1.91170	1.86471	1.81416	1.78731	1.75924	1.72979	1.69876	1.66587	1.63077
20	2.97465	2.58925	2.38009	2.24893	2.15823	2.09132	2.03970	1.99853	1.96485	1.93674	1.89236	1.84494	1.79384	1.76667	1.73822	1.70833	1.67678	1.64326	1.60738
21	2.96096	2.57457	2.36489	2.23334	2.14231	2.07512	2.02325	1.98186	1.94797	1.91967	1.87497	1.82715	1.77555	1.74807	1.71927	1.68896	1.65691	1.62278	1.58615
22	2.94858	2.56131	2.35117	2.21927	2.12794	2.06050	2.00840	1.96680	1.93273	1.90425	1.85925	1.81106	1.75899	1.73122	1.70208	1.67138	1.63885	1.60415	1.56678
23	2.93736	2.54929	2.33873	2.20651	2.11491	2.04723	1.99492	1.95312	1.91888	1.89025	1.84497	1.79643	1.74392	1.71588	1.68643	1.65535	1.62237	1.58711	1.54903
24	2.92712	2.53833	2.32739	2.19488	2.10303	2.03513	1.98263	1.94066	1.90625	1.87748	1.83194	1.78308	1.73015	1.70185	1.67210	1.64067	1.60726	1.57146	1.53270
25	2.91774	2.52831	2.31702	2.18424	2.09216	2.02406	1.97138	1.92925	1.89469	1.86578	1.82000	1.77083	1.71752	1.68898	1.65895	1.62718	1.59335	1.55703	1.51760

26	2.90913	2.51910	2.30749	2.17447	2.08218	2.01389	1.96104	1.91876	1.88407	1.85503	1.80902	1.75957	1.70589	1.67712	1.64682	1.61472	1.58050	1.54368	1.50360
27	2.90119	2.51061	2.29871	2.16546	2.07298	2.00452	1.95151	1.90909	1.87427	1.84511	1.79889	1.74917	1.69514	1.66616	1.63560	1.60320	1.56859	1.53129	1.49057
28	2.89385	2.50276	2.29060	2.15714	2.06447	1.99585	1.94270	1.90014	1.86520	1.83593	1.78951	1.73954	1.68519	1.65600	1.62519	1.59250	1.55753	1.51976	1.47841
29	2.88703	2.49548	2.28307	2.14941	2.05658	1.98781	1.93452	1.89184	1.85679	1.82741	1.78081	1.73060	1.67593	1.64655	1.61551	1.58253	1.54721	1.50899	1.46704
30	2.88069	2.48872	2.27607	2.14223	2.04925	1.98033	1.92692	1.88412	1.84896	1.81949	1.77270	1.72227	1.66731	1.63774	1.60648	1.57323	1.53757	1.49891	1.45636
40	2.83535	2.44037	2.22609	2.09095	1.99682	1.92688	1.87252	1.82886	1.79290	1.76269	1.71456	1.66241	1.60515	1.57411	1.54108	1.50562	1.46716	1.42476	1.37691
60	2.79107	2.39325	2.17741	2.04099	1.94571	1.87472	1.81939	1.77483	1.73802	1.70701	1.65743	1.60337	1.54349	1.51072	1.47554	1.43734	1.39520	1.34757	1.29146
120	2.74781	2.34734	2.12999	1.99230	1.89587	1.82381	1.76748	1.72196	1.68425	1.65238	1.60120	1.54500	1.48207	1.44723	1.40938	1.36760	1.32034	1.26457	1.19256
inf	2.70554	2.30259	2.08380	1.94486	1.84727	1.77411	1.71672	1.67020	1.63152	1.59872	1.54578	1.48714	1.42060	1.38318	1.34187	1.29513	1.23995	1.16860	1.00000

F Table for alpha=0.05

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	243.9060	245.9499	248.0131	249.0518	250.0951	251.1432	252.1957	253.2529	254.3144
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307

15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

F Table for alpha=0.025

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846	968.6274	976.7079	984.8668	993.1028	997.2492	1001.414	1005.598	1009.800	1014.020	1018.258
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980	39.4146	39.4313	39.4479	39.4562	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189	14.3366	14.2527	14.1674	14.1241	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.157	2.093	2.026	1.954	1.878

27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
inf	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

F Table for alpha=0.01

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361

13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000